XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) B	6) E	11) C	16) C	21) C
2) C	7) B	12) A	17) B	22) A
3) D	8) B	13) D	18) E	23) C
4) D	9) C	14) C	19) B	24) B
5) D	10) E	15) C	20) E	25) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. (B) Seja XYZ um número de três dígitos que detona 314. Devemos ter $X = 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9; $Y = 2, 3, ..., 9$ e $Z = 5, 6, 7, 8$ ou 9. Portanto, temos 6 opções para o primeiro dígito, 8 para o segundo e 5 para o terceiro. Ou seja $6\times8\times5 = 240$.

2. (C) Como $15m = 20n \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{4}{3}$ e a fração $\frac{4}{3}$ é irredutível, $m = 4k$ e $n = 3k$, k inteiro positivo. Assim, $mn = 12k^2$, que é múltiplo de 12. Tomando $k = 1$, verificamos que as demais alternativas são incorretas.

3. (D) Temos $x^2 = x+3 \Leftrightarrow x\cdot x^2 = x(x+3) \Leftrightarrow x^3 = x^2 + 3x = (x+3)+3x = 4x+3$.

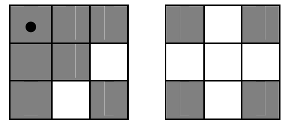
4. (D) O ângulo entre as retas AC e BD é 90 graus. Como $B'D'$ foi obtido a partir de uma rotação de 25 graus de BD, o ângulo entre as AC e $B'D'$ é 25 graus menor, sendo igual a 90 – 25 = 65 graus.

5. (D) Um dos cinco números é divisor da soma dos outros quatro se, e somente se, é divisor da soma dos cinco números. Tal soma é 20 + 24 + 28 + 38 + 42 = 152 = $4\cdot 38$, que é divisível por 38.

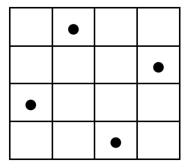
6. (E) As seguintes situações podem ocorrer para que Agilulfo não fique de castigo:
- Agilulfo volta depois da escola com uma advertência e sua mãe não está em casa;
- Agilulfo volta depois da escola sem advertência e sua mãe não está em casa;
- Agilulfo volta depois da escola sem advertência e sua mãe está em casa;

Com isso, Agilulfo pode tanto ter recebido como não ter recebido advertência e sua mãe pode estar ou não estar em casa, de modo que nenhuma das afirmações nas alternativas A a D é certamente verdadeira.

7. (B) Diremos que uma casa *ataca outra* se elas estiverem na mesma linha, coluna ou diagonal do tabuleiro.
Em um tabuleiro 2×2 duas casas quaisquer se atacam, de modo que não é possível colocar 2 peças que não se ataquem no tabuleiro.
Em um tabuleiro 3×3, cada casa do canto ataca outras 6, sobrando somente 2 casas que estão na mesma diagonal; portanto, se colocarmos peça em uma das casas do canto não é possível colocar as outras duas. Todavia, não é possível colocar 3 peças sem que duas se ataquem se não for permitido escolher casas do canto:

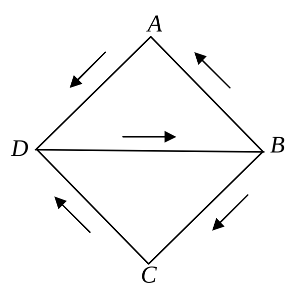


A figura a seguir exibe uma possibilidade para $n = 4$.

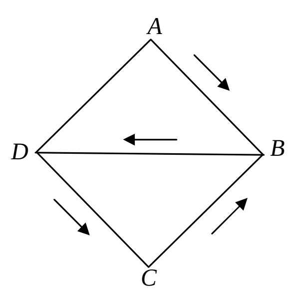


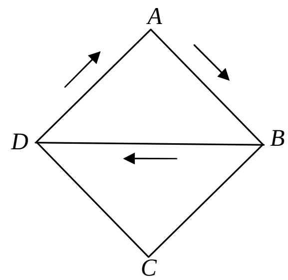
8. (B) Temos $\angle ALK = 180^\circ - \angle KLM - \angle BLM = 180^\circ - 90^\circ - \angle BLM = 90^\circ - \angle BLM = \angle BML$, ambos os ângulos $\angle KAL$ e $\angle LBM$ são retos, de modo que os triângulos *KAL* e *LBM* são congruentes. Portanto, sendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ e $BM = AL = 4 - x$. Logo a área do trapézio *AKMB* é igual a $\frac{AK + BM}{2} \cdot AB = \frac{x + (4 - x)}{2} \cdot 4 = 8$ e, consequentemente, a área de *CDKM* é $4^2 - 8 = 8$.

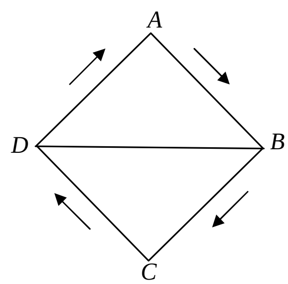
9. (C)
Possível caminho: *BADBCD*

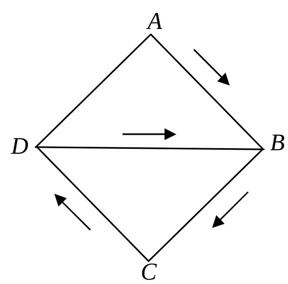


É impossível começar pelas casas *A* ou *C*, basta ver as situações abaixo:

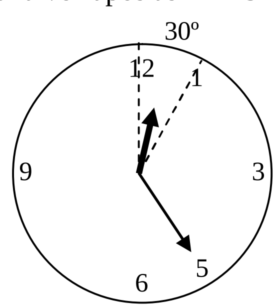








10. (E) Entre 12h e 12h30min, o ângulo entre os ponteiros cresce continuamente. Como o ângulo formado entre os ponteiros às 12h25min é menor do que $5 \cdot 30^\circ - \frac{20}{60} \cdot 30^\circ = 140^\circ$, o ângulo entre os ponteiros formam 145 graus pela primeira vez após as 12h25min.



11. (C) Sendo $n = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ a fatoração canônica de *n*, temos $2n = 2^{a+1} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$. Assim, a quantidade de divisores positivos de *n* é $(a+1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$ e a quantidade de divisores positivos de 2*n* é $(a+1+1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. Essa quantidade é o dobro da anterior quando

$(a+2)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1) = 2(a+1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1) \Leftrightarrow a+2 = 2(a+1) \Leftrightarrow a = 0$. Isso quer dizer que *n* não tem fatores 2, ou seja, *n* é ímpar.

12. (A) Há $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ maneiras de escolher os livros que serão guardados onde estavam antes. Os três demais livros, que denominaremos *A*, *B*, *C*, na ordem em que estavam antes, podem ser guardados na ordem *BCA* ou *CAB*. Assim, há $10\cdot 2 = 20$ possibilidades para Esmeralda guardar seus livros sobre heráldica.

13. (D) Após completas a tabela, teremos quatro 1´s em cada linha. Como temos 18 linhas, teremos $18\times 4 = 72$ 1´s em toda a tabela.

Se a quantidade de 1´s é a mesma em cada coluna, e temos seis colunas, teremos $\frac{72}{6} = 12$ 1´s por coluna.

14. (C) Tomando $x - 21$ no lugar de x, obtemos $f(x - 21) = f(x) = f(x - 21 + 12) = f(x - 9) = f(x - 9 + 12) = f(x + 3)$. Assim, $f(2009) = f(2006) = \ldots = f(5) = f(2) = 2$.

15. (C) Como o quadrilátero *ABCE* é inscritível, $\angle DEC = \angle DBA$. Sendo *AB* um diâmetro, o ângulo $\angle ACB$ é reto, de modo que *AC* é altura e mediana do triângulo *ABD*. Portanto *ABD* é isósceles com $AB = AD$ e $\angle ABD = \frac{180^\circ - \angle BAD}{2} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$. Assim, $\angle DEC = 54^\circ$.

16. (C) Temos $2x^2 - 12xy + ky^2 = 2(x-3y)^2 + (k-18)y^2$. Assim, se $k \geq 18$ então $2x^2 - 12xy + ky^2 \geq 0$ para todos x, y reais. Além disso, tomando $x = 3y > 0$, para $k < 18$ obtemos $2x^2 - 12xy + ky^2 < 0$. Logo o menor valor de k é 18.

17. (B) Para obtermos a maior diferença possível devemos tomar o maior e o menor primo cuja soma seja 126. Como 123 = 341, $121 = 11^2, 119 = 7\cdot 17, 115 = 5\cdot 23$, tal representação é 113 + 13, cuja diferença é 113 – 13 = 100.

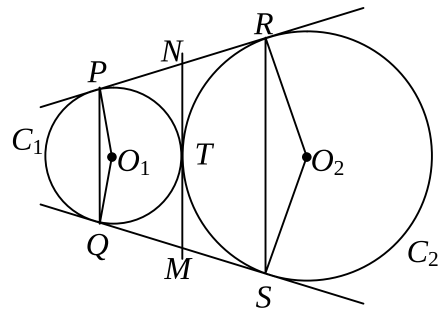
18. (E) Um subconjunto é superpar se, e somente se, não contém dois números ímpares. Assim, subconjuntos superpares contêm no máximo um ímpar e, portanto, 10 + 1 = 11 números.

19. (B) $S_1 = 1+2+3+\ldots+10 = 55$

$$S_2 = 2+4+6+\ldots+20 = 2(1+2+3+\ldots+10) = 2S_1$$
$$S_3 = 3+6+9+\ldots+30 = 3(1+2+3+\ldots+10) = 3S_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$S_{10} = 10+20+30+\ldots+100 = 10(1+2+3+\ldots+10) = 10S_1$$

Logo $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{10} = S_1 + 2S_1 + 3S_1 + \ldots + 10S_1 = (1+2+3+\ldots+10)S_1 = S_1\cdot S_1 = 55^2 = 3025$.

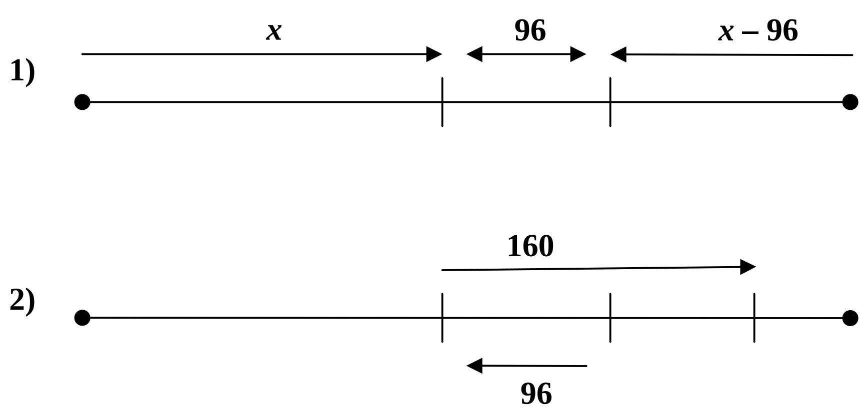
20. (E)



Sejam O_1 e O_2 os centros de C_1 e C_2, respectivamente. Os triângulos O_1PQ e O_2RS são semelhantes, assim $\frac{PQ}{RS} = \frac{O_1P}{O_2R} = \frac{3}{4}$. Além disso, os segmentos tangentes NP, NT e NR são congruentes e MN é paralelo a PQ e RS. Assim, M e N são pontos médios de QS e PR, respectivamente. Assim, MN é base média do trapézio $PQSR$, de modo que $MN = \frac{PQ+RS}{2}$. Assim, $\frac{PQ}{3} = \frac{RS}{4} = \frac{MN}{\frac{3+4}{2}} = \frac{MN}{3{,}5}$.

A razão entre as áreas dos trapézios $MNPQ$ e $MNRS$, que têm alturas iguais, é $\frac{\frac{MN+PQ}{2}}{\frac{MN+RS}{2}} = \frac{3{,}5+3}{3{,}5+4} = \frac{13}{15}$.

21. (C) Seja $2x$ a distância entre as cidades, em quilômetros. Quando o carro mais rápido chega ao ponto M, ele percorre x km e o mais lento, x – 96 km (situação 1).

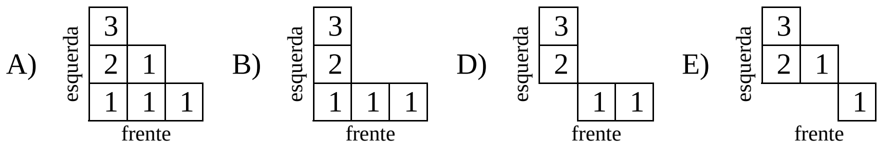


Quando o carro mais lento chega ao ponto M, ele percorre mais 96 km e o carro mais rápido mais 160 km.

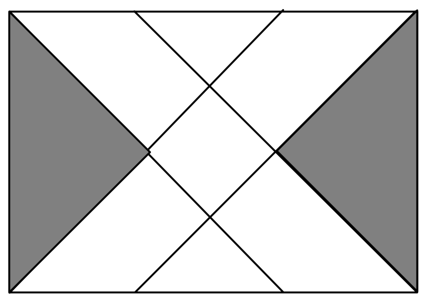
Como as velocidades dos carros são constantes, $\frac{x-96}{x} = \frac{96}{160} \Leftrightarrow 5(x-96) = 3x \Leftrightarrow 2x = 480$ km.

22. (A) Como $8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}} \underset{9}{\equiv} (-1)^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}} \underset{9}{\equiv} 1$, a soma dos dígitos de todos os números que Agilulfo deve escrever é congruente a 1 módulo 9. Portanto, quando Agilulfo obtiver um número de um único dígito, ele vira 1.

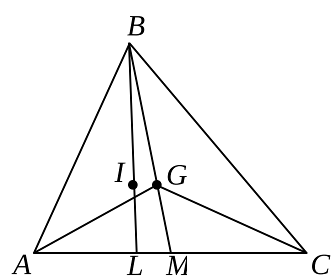
23. (C) Considere a quantidade de cubos no quadradinho central da vista de cima apresentada na alternativa C. Esse é o único do meio da vista da frente e portanto deve ter 1 cubo; esse é também o único do meio da vista da esquerda e portanto deve ter 2 cubos, o que não é possível. Então a vista de cima não pode ser a que está apresentada na alternativa C.
As figuras a seguir indicam possíveis quantidades de cubos em cada quadradinho da vista de cima das demais alternativas.



24. (B) A figura abaixo mostra todos os pontos amarelos, que são dois triângulos de área $\frac{24\cdot 12}{2}=144$. Dessa forma, a área total é 288.



25. (C) Sejam (*AB*, *AC*, *BC*) a progressão aritmética, *G* o baricentro de *ABC* e *I* o incentro de *ABC*. Sejam também $b = AC$ e r o inraio de *ABC*.



A área de *AGC* é um terço da área de *ABC*, que é igual a $\frac{r(b-t+b+b+t)}{2}=\frac{3br}{2}$. Assim, a área de *AGC* é $\frac{br}{2}=\frac{AC\cdot r}{2}$. Logo a altura relativa a *G* de *AGC* é *r* e, portanto, as distâncias de *I* e *G* a *AC* são iguais, o que prova que *GI* é paralelo a *AC*.

Sendo *BL* a bissetriz de $\angle ABC$ e *M* o ponto médio de *AC*, temos $AM=\frac{b}{2}$ e, pelo teorema das bissetrizes, $\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}=\frac{b-t}{b+t}\Leftrightarrow\frac{AL}{AL+LC}=\frac{b-t}{b-t+b+t}\Leftrightarrow\frac{AL}{b}=\frac{b-t}{2b}\Leftrightarrow AL=\frac{b-t}{2}$. Assim, $AM-AL=\frac{b}{2}-\frac{b-t}{2}=\frac{t}{2}$.

Os triângulos *BLM* e *BIG* são semelhantes, assim, $\frac{IG}{LM} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow IG = \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{3}$.

Outra solução: utilizando as notações da solução anterior, $G = \frac{A+B+C}{3}$ e

$$I = \frac{(b-t)C + bB + (b+t)A}{b-t+b+b+t} = \frac{b(A+B+C)+t(A-C)}{3b} = \frac{A+B+C}{3} + \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b} = G + \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b}$$

$$\Rightarrow I - G = \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b} \Rightarrow \left|\overrightarrow{GI}\right| = \frac{t \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right|}{3b} = \frac{t \cdot b}{3b} = \frac{t}{3} \Leftrightarrow GI = \frac{t}{3}$$