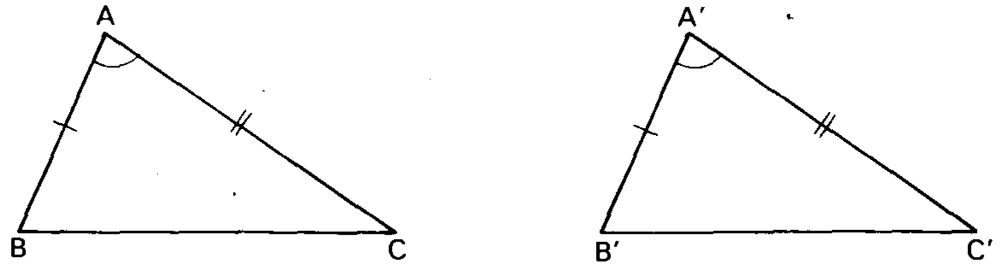
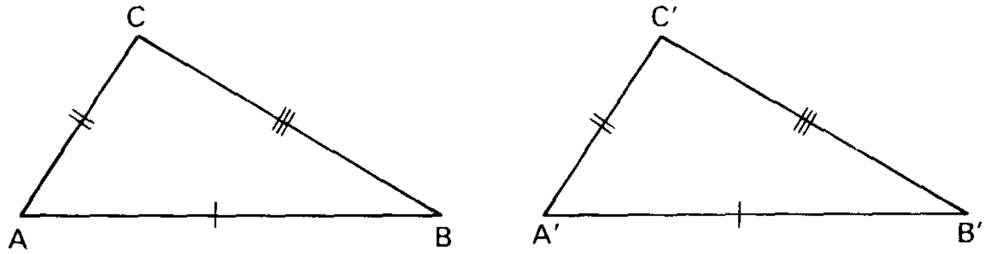
- Congruência de triângulos

1º Caso: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes. (LAL)



2º Caso: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes. (ALA)

3º Caso: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes. (LLL)

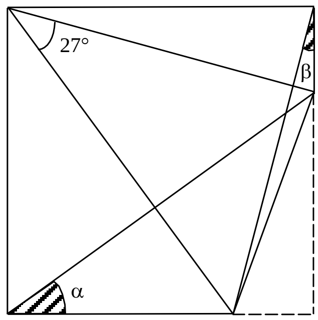


4º Caso: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes. (LAA_o)

5º Caso (Válido somente para triângulos retângulos): Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Exercícios

1. O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura abaixo? (OBM)



RESP: 63º

2. Um triângulo ABC é tal que $\angle C = 2\,\angle A$ e $AC = 2BC$. Prove que este triângulo é retângulo. (OCM)

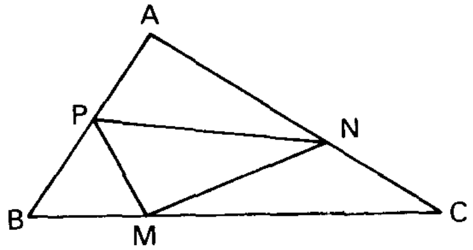
3. Sobre os lados de um triângulo ABC constroem – se externamente os triângulos eqüiláteros BCD, CAE e ABF. Prove que os segmentos AD, BE e CF são congruentes.

- ## Desigualdade triangular

  Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

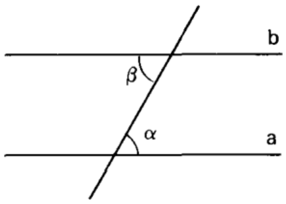
  Exercícios

1. Se a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$. (Torneio das Cidades)
2. Mostre que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a semi – soma dos catetos.
3. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC , mostre que PB + PC < AB + AC.
4. Demonstre que o perímetro do triângulo MNP é menor que o perímetro do triângulo ABC da figura abaixo.



- ## Paralelismo

  Duas retas distintas são paralelas se, e somente se, formarem com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes.

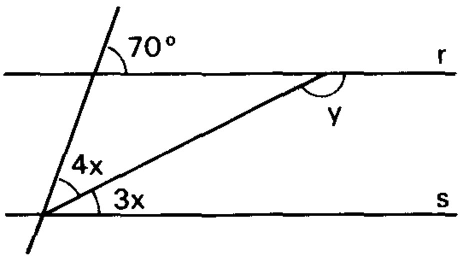


$\alpha \equiv \beta \leftrightarrow \frac{\frac{a}{\square}}{b}$

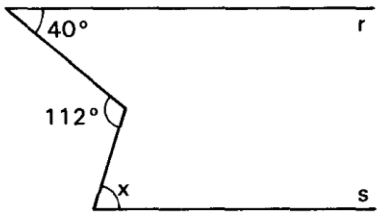
Como consequência imediato do fato acima concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.

Exercícios

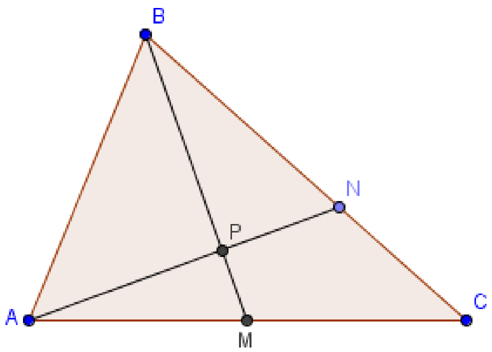
1. Determine o valor de x e y, sendo r // s.



2. Calcule o valor de x, sendo r // s.



3. No triângulo ABC isósceles de base BC, os pontos D e F estão sobre o lado AB e E está sobre o lado AC, de tal forma que BC = CD = DE = EF = FA. Determine a medida do ângulo ∠BAC.
4. Seja D um ponto no interior do triângulo ABC tal que ∠BDC = 123°, ∠ABD = 15° e ∠ACD = 21°. Calcule a medida do ângulo ∠BAC.
5. Seja ABC um triângulo tal que ∠ABC = 2∠BCA, ademais, seja D o ponto do lado BC tal que AD é bissetriz do ângulo ∠CAB e CD = AB. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABC.
6. Seja ABC um triângulo isósceles, com AC = BC, considera - se o ponto P no lado AC tal que AP = AB e Q um ponto no prolongamento de AB (B entre A e Q) tal que AQ = AC. Se PB = QB, ache as medidas dos ângulos do triângulo ABC.
7. Seja ABC um triângulo isósceles, com AB = BC e ∠ABC = 82°. Seja M um ponto no interior do triângulo tal que AM = AB e ∠MAC = 11°. Ache a medida do ângulo ∠MCB.
8. Seja ABC um triângulo isósceles de base AC tal que ∠B = 20°. Prove que:
   a) AB < 3AC.
   b) AB > 2AC.
9. Na figura abaixo AM = MC, BC = 2AP e AN é perpendicular a BM. Determine a medida do ângulo ∠ANB.



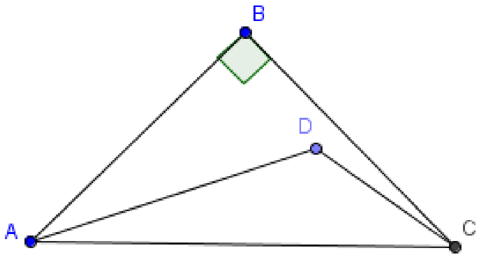
RESP: 60°

10. Seja ABC um triângulo e sejam pontos P, Q e M sobre os lados AB, BC e PQ, respectivamente, tais que AM e CM são bissetrizes dos ângulos BAC e ACB, respectivamente e PQ//AC. Se AP + QC = 6, determine a medida do segmento PQ.
    a) 12 b) 3 c) 9 d) 6 e) 4,5 RESP: d

11. Seja ABC um triângulo e seja D o ponto no semi – plano contrário ao do vértice A, gerado pela reta BC, tal que ∠BDA = 2∠BCA = 20°, AC = AD e BC = CD. Determine a medida do ângulo ∠CAD.
    a) 40° b) 50° c) 80° d) 45° e) 30° RESP: c

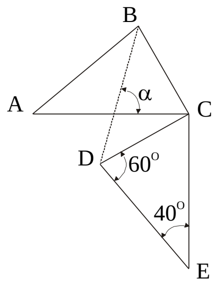
12. Seja ABC um triângulo e D o ponto do lado AC tal que ∠ABC = 80° + ∠BAC e DC = BC. Determine a medida do ângulo ∠ABD.
    a) 40° b) 50° c) 65° d) 80° e) 60° RESP: a

13. Na figura abaixo, AB = BC = AD e ∠BAD = ∠ACD = x. Determine x.
    a) 30º b) 15º c) 22º30´ d) 18º30´ e) 26º30´ RESP: a



14. Seja ABC um triângulo tal que ∠A = 20º. Sejam D e E pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente, tais que ∠AED = 40º e ED = DC = BC, determine a medida do ângulo ∠B.
    a) 20º b) 40º c) 60º d) 80º e) 100º RESP: d

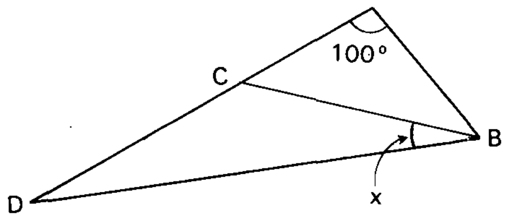
15. O triângulo *CDE* pode ser obtido pela rotação do triângulo *ABC* de 90º no sentido anti-horário ao redor de *C*, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:



a) 75º **b)** 65º **c)** 70º **d)** 45º **e)** 55º (OBM) RESP: e

16. As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo *ABC* cortam-se no ponto *I*. Sabe-se que *AI* = *BC* e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$. (OBM) RESP: 60º

17. Da figura, sabemos que AB = AC, A = 100º e AD = BC. Determine x = ∠CBD.



18. Seja ABC um triângulo tal que o ângulo ∠C = 58º. Seja L o ponto sobre o lado AC tal que ∠LBC = 6º e AL = LB + BC. Determine a medida do ângulo ∠ABL.
    a) 60º b) 69º c) 78º d) 87º e) 84º RESP: d

- Quadriláteros Notáveis

1. Paralelogramo: Um quadrilátero convexo é dito um paralelogramo quando possuir lados opostos paralelos.
   Teorema: Um quadrilátero convexo é paralelogramo se, e somente se:
   a) Ângulos opostos são iguais;
   b) Lados opostos são iguais;
   c) Diagonais cortam – se em seus pontos médios;
2. Trapézio: Um quadrilátero convexo é trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos. Um trapézio será dito isósceles se os lados não paralelos foram iguais e será dito retângulo se um dos ângulos da base for reto.
   Teorema: Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes e as diagonais também são congruentes.

3. Losango: Paralelogramo com todos os lados iguais.
   Teorema: As diagonais do losango são perpendiculares.

4. Retângulo: Paralelogramo com quatro ângulos retos.

5. Quadrado: Retângulo com os quatro lados iguais.

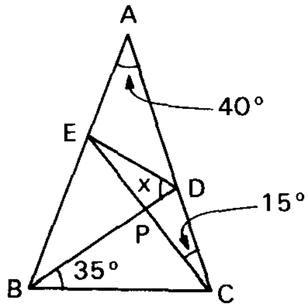
6. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^o.

- Propriedades importantes
  1. A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.
  2. Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:
     a) ele é paralelo ao terceiro lado.
     b) ele é metade do terceiro lado.
  3. Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:
     a) ele é paralelo às bases.
     b) ele é igual à semi – soma das bases.

Exercícios

1. M e N são os pontos médios respectivos dos lados BC e CD de um paralelogramo ABCD. Demonstrar que os segmentos AM e AN dividem a diagonal BD em três partes iguais.
2. Sejam AB e CD as bases de um trapézio tal que a base menor CD é igual à soma dos lados não paralelos do trapézio. Se E é um ponto de CD e EA é a bissetriz do ângulo $\angle$A, mostre que EB é também bissetriz do ângulo $\angle$B. (OCM)
3. Em um quadrado ABCD, K é um ponto do lado BC e a bissetriz do $\angle$KAD intersecta o lado CD no ponto M. Prove que o comprimento do segmento AK é igual à soma dos comprimentos dos segmentos DN e BK. (Torneio das Cidades)
4. ABCD é um paralelogramo. Um ponto M é escolhido sobre o lado AB tal que $\angle$MAD = $\angle$AMO, onde O é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. Prove que MD = MC. (Torneio das Cidades)
5. Em um triângulo acutângulo ABC o ângulo interno de vértice A mede 30^o. Os pontos B_1 e C_1 são os pés das alturas traçadas por B e C, respectivamente e os pontos B_2 e C_2 são os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares. (OBM)
6. Seja ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio do lado BC. Se D e E são os pés das alturas relativas aos AB e AC, respectivamente. Prove que ME = MD.
7. Seja ABCD um paralelogramo, M o ponto médio do lado CD, H o pé da perpendicular baixada desde B até AM. Prove que o triângulo BCH é isósceles.

8. Em um triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, sejam D um ponto do lado AC ($D \neq A$ e $D \neq C$) e E o ponto no prolongamento do lado BA, tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio do segmento BD, R o ponto médio do segmento CE e Q o ponto de interseção de ED e BC, prove que o quadrilátero ARQP é um quadrado.
9. Seja ABC um triângulo isósceles, com AB = AC e $\angle A = 20^o$. Sejam M o pé da altura relativa ao lado AB e N o ponto do lado AC, tal que 2CN = BC. Ache a medida do ângulo $\angle AMN$. RESP: 60^o
10. Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.
11. Uma reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um quadrilátero convexo forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento. (OBM)
12. Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, prove que esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.
13. No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que BE = 2EC. Dado que os ângulos ADC e BAE são iguais, encontre o ângulo BAC. (OBM) RESP: 90^o
14. Seja ABC um triângulo e P um ponto no seu interior tal que $\angle PAC = \angle PBC$. Sejam L e M os pés das perpendiculares por P aos lados BC e AC, respectivamente. Prove que DL = DM, onde D é o ponto médio de AB. (Austrália)
15. Seja ABC um triângulo isósceles, com AB = AC. Seja D o ponto médio do lado BC, M o ponto médio do segmento AD e seja N a projeção de D sobre BM. Prove que $\angle ANC = 90^o$. (Romênia)
16. Seja ABCD um trapézio (AB paralelo a CD). A distância entre os pontos médios das bases é igual à distância entre os pontos médios das diagonais. Prove que os ângulos DAC e DBC são obtusos. (Eslovênia)
17. Seja ABC um triângulo e o ponto D sobre o lado AC tal que $\angle DBC = 90^o$, DC = 2AD e $\angle ABD = \angle BCA$. Determine a medida do ângulo $\angle BAC$.
 a) 30^o b) 37^o c) 45^o d) 53^o e) 60^o RESP: a
18. O triângulo ABC abaixo é isósceles de base BC. Determine x.



19. Num triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC, trace a bissetriz BS, com S em AC, relativa ao lado AC. Mostre que AS < SC.
20. Em um triângulo isósceles ABC, com AB = BC, sejam K em AB e L em BC dois pontos tais que AK + LC = KL. A reta paralela a BC que passa pelo ponto médio M de KL, corta AC em N. Ache a medida do ângulo $\angle KNL$.
21. Seja ABC um triângulo isósceles, com AC = BC. A bissetriz do ângulo $\angle A$ intersecta o lado BC em D, e a bissetriz do ângulo $\angle C$ intersecta o lado AB em E. Se AD = 2CE, determine as medidas dos ângulos do triângulo ABC.
22. Seja ABCDE um pentágono convexo, tal que AE = ED e BC = CD. Se $\angle BAE + \angle EDC + \angle CBA = 360^o$ e P é o ponto médio de AB. Prove que o triângulo ECP é retângulo. (Rioplatense)
23. Seja ABC um triângulo tal que BC = 2AB. Seja D o ponto médio de BC e E o ponto médio de BD. Prove que AD é bissetriz do ângulo $\angle CAE$.

24. Seja ABC um triângulo e sejam D e E pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente. As bissetrizes dos ângulos ∠ABE e ∠ACD se intersectam em F. Prove que ∠BDC + ∠BEC = 2∠BFC.
25. Seja ABC um triângulo retângulo em A e AB > AC. Seja D o ponto médio de BC. O ponto E é a intersecção da mediatriz de BC com a bissetriz do ângulo A. Prove que:
    a) AD = DE.
    b) ∠DAE = ½ (∠C - ∠B).
26. Seja ABC um triângulo e sejam D e E as projeções do vértice A sobre as bissetrizes dos ângulos B e C, respectivamente. Prove que DE é paralelo a BC.

- Pontos Notáveis
    1. Baricentro: Ponto de encontro das Medianas.
       As três medianas de um triângulo se encontram em um ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.
    2. Incentro: Ponto de encontro das Bissetrizes.
       As três bissetrizes internas de um triângulo se encontram em um ponto que está à igual distância dos lados do triângulo. Além disso, o Incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
    3. Circuncentro: Ponto de encontro das Mediatrizes.
       As mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram em um ponto que está á igual distância dos vértices do triângulo. Além disso, o Circuncentro é o centro da circunferência circunscrita.
    4. Ortocentro: Ponto de encontro das Alturas.
       As três alturas de um triângulo se encontram em um ponto.
    5. Excentro: Ponto de encontro das bissetrizes externas de dois ângulos e a bissetriz interna do terceiro ângulo de um triângulo. Todo triângulo possui três excentros. Os excentros são os centros das três circunferências ex – inscritas do triângulo.

Exercícios

1. Seja ABCD um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, ABCD é um paralelogramo. (OBM)
2. AD, BE e CF são alturas de um triângulo ABC. K, M e N são os ortocentros dos triângulos AEF, BFD e CDE. Prove que KMN e DEF são triângulos congruentes. (Torneio das Cidades)
3. Seja ABC um triângulo e sejam H o ortocentro e o O o circuncentro do triângulo. Se ∠ABH = ∠HBO = ∠OBC e BH = BO determine a medida do ângulo ∠A.
4. Seja N é o ponto do lado AC do triângulo *ABC* tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB. Sabendo que *AC* = 12 cm e que o baricentro G do triângulo *ABC* pertence ao segmento *MN*, determine o comprimento do segmento *BG*. (OBM)
5. Sejam AF, BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo ∠A medindo 120^o. Prove que o ângulo ∠GFH mede 90^o. (Leningrado)
6. A medida do ângulo ∠B de um triângulo ABC é 120^o. Seja M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo ∠ABC e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo ∠ACB. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que ∠APM = 30^o. (OBM)
7. Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo ∠A e N o pé da bissetriz interna do ângulo ∠B. Suponha que MN seja bissetriz do ângulo AMC. Calcule a medida do ângulo ∠A.
8. Em um triângulo ABC seja D o ponto sobre o lado BC tal que AD é perpendicular a BC, seja E o ponto do lado AC tal que BE é perpendicular a AC e seja H o ponto de intersecção

de AD e BE. Se $\angle BAC = 80^o$ e $BH = AC$, determine a medida dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCA$. RESP: $\angle ABC = 45^o$ e $\angle BCA = 55^o$.

9. Seja ABC um triângulo com $\angle A = 60^o$. A mediatriz do lado AB corta a reta AC no ponto N e a mediatriz do lado AC corta a reta AB no ponto M. Prove que $BC = MN$.
10. Seja ABCD um quadrilátero tal que $BC = CD = DA$, $\angle ABC = 80^o$, $\angle BCD = 80^o$ e $\angle CDA = 60^o$. Seja M o ponto do lado BC tal que $CM = AB$. Determine a medida do ângulo $\angle AMD$. RESP: 70^o
11. Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. Seja L o ponto médio de AH, M o ponto médio de AC e N o ponto médio de BC. Determine a medida do ângulo $\angle LMN$.
    a) 30^o b) 45^o c) 60^o d) 90^o e) 120^o RESP: d
12. Seja ABC um triângulo e O o seu circuncentro. Seja L a intersecção de BO com o lado AC. Se $BC = BL$ e $\angle ABL = 20^o$, determine a medida do ângulo $\angle OBC$. RESP: 55^o
13. Seja G o baricentro do triângulo ABC e seja P o ponto no prolongamento do lado AC, mais próximo de A, tal que $BG = 3AP = 6$, $\angle APG = 30^o$ e $\angle BGP = 90^o$. Determine a medida do lado AC. RESP: 8
14. Seja ABC um triângulo. Sobre os lados AB e AC são construídos no exterior do triângulo os quadrados ABDE e ACFG. Prove que CD, BF e a altura relativa ao vértice A são concorrentes.
15. Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC. As projeções de A, B e C sobre a reta r são M, N e P, respectivamente. Prove que $AM = BN + CP$.