GRAFOS: UMA BREVÍSSIMA INTRODUÇÃO

SAMUEL FEITOSA

1 $\sum \deg(v) = 2|E|$

Problema 1. Prove que um grafo com n vértices e k arestas tem pelo menos $\dfrac{k(4k-n^2)}{3n}$ triângulos.

Problema 2. Uma senha de banco consiste de um número de 3 dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 8\}$. Devido a um defeito no caixa eletrônico, a conta pode ser operada se acertarmos apenas dois dos 3 dígitos. Então a conta pode ser operada certamente após 64 tentativas. Qual o número mínimo de tentativas necessárias para podermos operar a conta?

Problema 3. (TT 1985) Uma certa classe de 32 alunos é organizada em em 33 clubes de modo que cada clube contém 3 alunos e quaisquer dois clubes não possuem o mesmo conjunto de membros. Prove que existem dois clubes com exatamente um membro em comum.

Problema 4. (Bielorússia) Os alunos da OBM aprendem n matérias na semana olímpica. É verdade que para cada matéria exatamente 3 alunos são os melhores nessa matéria, e que para cada 2 matérias, existe exatamente um aluno que é um dos melhores nas duas. Prove que:

a) Se $n = 8$, existe um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

b) Se $n = 7$, não é necessário que haja um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

Problema 5. Cientistas estão reunidos para um congresso matemático. Sabe-se que dois cientistas com o mesmo número de amigos não possuem amigos em comum. Se existem cientistas que se conhecem, prove que existe um cientista que possui apenas um amigo.

Problema 6. Existem 1000 cidades em Shinelândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Shinelândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Problema 7. Em um torneio de xadrez, cada um dos participantes jogou exatamente uma vez com cada um dos demais e não houve empates. Mostre que existe um jogador P tal que, para qualquer outro jogador Q, uma das situações a seguir ocorre:

i) Q perdeu de P;

ii) Q perdeu de alguém que perdeu de P.

2 ÁRVORES E CONEXIDADE

Problema 8. (TT 1988) João pintou um tabuleiro retangular 2009×2009, que estava dividido em quandradinhos de modo usual, com 13 cores. Um par de cores é bacana se existem quadradinhos vizinhos pintados com essas cores. Qual o número mínimo de pares bacanas?

Problema 9. (TT 1988) Existem 1988 cidades e 4000 estradas em um certo país(cada estrada conecta duas cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais que 20 cidades.

Problema 10. Quaisquer duas da 101 cidades de Gugulândia são conectadas por não mais que uma estrada de mão única. Sabemos que existem exatamente 40 estradas saindo e 40 estradas entrando em cada cidade. Prove que uma pessoa pode chegar em qualquer cidade partindo de qualquer outra dirigindo através de não mais que duas cidades.

Problema 11. Existem 100 cidades em no reino de Gugulândia e cada par de cidades é conectado por uma estrada de mão única. Foi descoberto que a propriedade de conexidade(ser capaz de dirigir de uma cidade para qualquer outra seguindo as leis) é falha. Prove que o rei pode remover este problema se ele escolher uma das cidades e reverter as direções de todas as estradas que chegam nessa cidade.

Problema 12. (Rússia) Uma cidade tem a forma de um tabuleiro $(m-1) \times (n-1)$ dividido em quadrados(existem m ruas verticais e n ruas horizontais). Nas ruas da cidade, mas não nos cruzamentos das ruas, existem guardas de trânsito. Cada guarda informa a placa do carro que passa, a direção com que se desloca e a hora em que passou. Qual é a menor quantidade de guardas que precisamos colocar, para conhecermos o caminho de qualquer carro que se mova em um circuito fechado?

Observação: Um circuito não passa duas vezes por um mesmo ponto.

Problema 13. Geislan desenhou algumas diagonais de um polígono de modo que que o polígono ficou dividido em triângulos. Mostre que Davi pode pintar os vértices do polígono de três cores de modo que não existam dois vértices de um triângulo da mesma cor.

Problema 14. (O Problema da Galeria de Arte)As paredes de uma galeria de arte formam um polígono de n-lados não necessariamente convexo. Guardas são colocados em posições fixas na galeria. Assumindo que os guardas não podem caminhar mas podem rodar suas cabeças, qual o número mínimo de guardas necessários que devemos colocar na galeria para termos certeza que todo o interior da mesma estará vigiado.

Problema 15. (USAMO 1986) Durante uma certa palestra, cada um dentre cinco matemáticos adormeceu exatamente duas vezes. Para cada par desses matemáticos, existe algum momento em que ambos estavam dormindo simultaneamente. Prove que, em algum momento, três deles estavam dormindo simultaneamente.

Problema 16. (Russia 2009) São dados uma árvore finita T e um isomorfismo $f : T \to T$. Suponha que f não possui pontos fixos. Mostre que existem dois vértices a e b tais que $f(a) = b$ e $f(b) = a$.

Problema 17. Seja T uma árvore fixa com d vértices. Se G não possui nenhum subgrafo isomorfo a T então os vértices de G podem ser coloridos com no máximo $d-1$ cores de modo que dois vértices adjacentes possuam cores distintas.

3 GRAFOS COMPLETOS, CICLOS E COLORAÇÕES

Problema 18. (Rússia 2001) Em uma festa, existem $2n+1$ pessoas. Sabemos que para qualquer grupo de n pessoas, existe uma pessoa fora do grupo que as conhecem. Mostre que existe uma pessoa que conhece todos na festa.

Problema 19. (Rússia 2003) Existem n pessoa em uma festa. Após uma segundo, desde o início da festa, uma sirene toca e todos que conhecem 0 pessoas vão embora. Depois de um segundo a sirene toca e todos que conhecem 1 pessoa vão embora.Depois de um segundo a sirene toca novamente e todos que conhecem 2 pessoas dentre os restantes na festa vão embora. O processo se repete n vezes. Determine o maior número possível de pessoas que podem restar na festa.

Problema 20. Vinte times de futebol participam de um torneio. No primeiro dia todos os times jogam uma partida. No segundo dia, todos os times jogam outra partida. Prove que é possível, após o segundo dia, escolher um grupo de 10 times de modo que entre eles não tenha acontecido nenhuma partida.

Problema 21. Cada estrada de ABgugulândia, que consiste de dois estados A e B, conecta duas cidades de diferentes estados. Sabemos que nenhuma cidade está conectada com mais que 10 outras cidades. Prove que é possível colorir todas as cidades em ABalexlândia, usando 10 cores, de tal maneira que não existam duas estradas adjacentes da mesma cor
Observação: Duas estradas são adjacentes se partem de uma mesma cidade.

Problema 22. Existem 2001 cidades em um país e toda cidade está ligada a pelo menos 1600 outras cidades por uma estrada azul. Encontre o maior n para o qual existem n cidades tal que quaisquer duas são ligadas por uma estrada.

Problema 23. Considere um tabuleiro $n \times n$ com todas as suas entradas pertencentes ao conjunto $\{0, 1\}$. Se todas as linhas são distintas, mostre que podemos apagar uma coluna de modo que as linhas restantes serão ainda distintas.

Problema 24. (Olimpíada Russa) 200 estudantes participaram de uma competição de matemática consistindo de seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois estudantes que juntos resolveram todos os seis problemas.

Problema 25. Na Terra de Oz há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos A,B,C,D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a

$$\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}.$$

Problema 26. Considere um grafo G de n vértices tal que, se adicionarmos qualquer nova aresta a G, um triângulo será formado. Qual o número mínimo de arestas de G?

Problema 27. Seja S um conjunto de $n \leq 3$ pontos no espaço. Os segmentos unindo esses pontos têm comprimentos distintos e r desses segmentos são coloridos de vermelho. Seja m o menor inteiro tal que $m \geq \dfrac{2r}{n}$. Prove que sempre existe um caminho de m segmentos vermelhos com seus comprimentos sucedendo-se de maneira crescente.

Problema 28. Duas famílias $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de polígonos convexos são dadas no plano. Quaisquer dois polígonos de diferentes famílias tem interseção não vazia. Além disso, em cada uma dessas duas famílias existem dois polígonos disjuntos. Prove que existe uma reta que corta todos os polígonos de ambas as famílias.

Problema 29. (TT 1985)Os dígitos $0, 1, \ldots, 9$ estão escritos nas casas de um tabuleiro 10×10. Cada número aparece 10 vezes. Mostre que existe uma linha ou coluna contendo mais que 3 dígitos diferentes.

Problema 30. (Romênia) Mostre que se $n \geq 11$, qualquer 3-coloração de um grafo completo com n vértices contém um 4-ciclo monocromático.

Problema 31. (Teste de Seleção Cone Sul do Peru) Tuvalu possui 10 cidades, chamadas $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$, e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possível chegar de H_1 a H_{10}. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

(i) Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.

(ii) Existem duas cidades H_i e H_j, $2 \leq i < j \leq 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j.

4 Teoria de Ramsey

Dado um conjunto A, denotaremos por $[A]^m$ o conjunto $\{B \subset A | \#B = m\}$.

Teorema 1. Sejam m e k inteiros positivos. Dados os inteiros positivos $a_1, \ldots, a_k$, existe um inteiro $R_m(a_1, \ldots, a_k)$ tal que para todo $n \geq R_m(a_1, \ldots, a_k)$ e qualquer função $f : [n]^m \to [k]$, exite $j \in [k]$ e um subconjunto $B \subset [n]$ com a_j elementos tal que $f([B]^m) = \{f(x) | x \in [B]^m\} \subset \{j\}$.

Problema 32. Dado um inteiro positivo $n \geq 4$ existe um inteiro positivo $f(n)$ tal que dados $f(n)$ pontos no plano em posição geral há n deles que são vértices de um n-ágono convexo.

Teorema 2. (Versão infinita) Sejam m e k inteiros positivos e A um conjunto infinito. Para qualquer função $f : [A]^m \to [k]$, existe $j \in [k]$ e um subconjunto infinito $B \subset A$ tal que $f([B]^m) = \{j\}$.

Problema 33. Mostre que:

1. $R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$
2. $R(a_1, \ldots, a_{k-1}, 2) = R(a_1, \ldots, a_{k-1})$ para $a_1, \ldots, a_{k-1} \geq 2$.
3. $R(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots a_{\sigma(k)} = R(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ para $a_1, \ldots, a_k \geq 2$ e qualquer permutação σ de $\{1, 2, \ldots, k\}$.
4. $R(a_1, \ldots, a_k) \geq R(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k) + \ldots + R(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k - 1) - k + 2$.

Problema 34. Para todos os inteiros $p, q \geq 2$, se $R(p-1, q)$ e $R(p, q-1)$ são pares, então

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1.$$

Problema 35. Mostre que $R(3, 4) = 9$.

Problema 36. Para todos os inteiros $p, q \geq 2$, se $R(p-1, q)$ e $R(p, q-1)$ são pares, então

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1.$$

Problema 37. As arestas de um K_7 são coloridas com duas cores: azul e vermelho.

a) Mostre que existem pelo menos quatro 3-cliques monocromáticos.

b) Mostre que existem dois 3-cliques monocromáticos sem arestas em comum.

Teorema 3. (Shur) Para todo inteiro positivo k, existe um inteiro positivo m tal que toda k-coloração de $[m]$ possui três elementos monocromáticos x, y, z tais que $x + y = z$.

Problema 38. (IMO 1978) Prove que em qualquer coloração dos inteiros $\{1, 2, \ldots, 1978\}$ com seis cores, existem inteiros x, y, z da mesma cor tais que $x + y = z$.

Problema 39. Para todo $m \geq 1$, existe p_0 tal que para qualquer primo $p \geq p_0$ a congruência $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ tem solução não trivial, i.e. , com $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Problema 40. Mostre que $R_3(k) \leq \lfloor k!e \rfloor + 1$.

Problema 41. Mostre que existe um conjunto infinito S de inteiros positivos tal que a soma de quaisquer dois elementos distintos de S possui um número par de divisores primos distintos.

Problema 42. (O Problema Cuático da Eureka! 5) Prove que para qualquer conjunto de inteiros positivos A e para todo inteiro positivo k existe um conjunto infinito de números primos S tal que o produto de k elementos distintos de S está sempre em A ou o produto de k elementos distintos de S nunca pertence a A.

5 Teorema de Turán

Problema 43. (Rússia) Em um torneio nacional de futebol participam 20 equipes. Qual é o número mínimo de partidas que deve ter o torneio para que, dentre quaisquer três equipes, haja duas que joguem entre si?

Teorema 4. (Turán,1941)Suponha que $n = t(p-1) + r, 1 \leq r \leq p-1$. Se um grafo de n vértices contém mais que $\frac{n^2(p-2)}{2(p-1)} - \frac{r(p-1-r)}{2(p-1)}$ arestas, então ele contém um K_p como subgrafo.

Problema 44. (OBM 2005)Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então,funciona.

Problema 45. (IMO 2003) Seja A um subconjunto de 101 elementos do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Prove que existem números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

sâo disjuntos dois a dois.

Problema 46. Existem 21 pontos sobre um círculo. Prove que existem pelo menos 100 arcos definidos por esses 21 pontos, cujas medidas em graus são menores ou iguais a $120°$.

Problema 47. (Polônia 1997) Dados quaisquer n pontos sobre um círculo unitário, mostre que no máximo $\frac{n^2}{3}$ segmentos ligando pares de pontos tem comprimento maior que $\sqrt{2}$.

Problema 48. (Japão 1997) Seja G um grafo com 9 vértices. Suponha que, dados quaisquer 5 vértices de G, existem pelo menos duas arestas com ambas as extremidades dentre esses 5 vértices. Qual é o menor número possível de arestas em G?

6 O Teorema de Dirac

Teorema 5. (Teorema de Dirac) Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ tal que para quaisquer doisvértices não adjacentes x e y tenhamos:

$$d(x) + d(y) \geq k.$$

Se $k = n$, então G é Hamiltoniano e se $k < n$ então G contém um caminho de comprimento k e um ciclo de comprimento pelo menos $\frac{(k+2)}{2}$.

Problema 49. Os $2n$ cavaleiros do reino de Gugulândia estão se preparando para uma reunião. Cada um deles tem no máximo $n-1$ inimigos. Prove que Imbuzeiromerlin, o mago, pode posicioná-los ao redor de uma mesa circular de modo que ninguém esteja sentado ao lado de um inimigo.

7 Teorema dos Casamentos

Definição 1. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos, não necessariamente distintos, de um conjunto finito X. Uma sequência $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é um sistema de representantes distintos (SRD) para a família $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se $x_i \in A_i$ para todo i.

Teorema 6. (Teorema dos Casamentos) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos de um conjunto finito X. Existe um SRD para esta família se a união de quaisquer m desses conjuntos contém pelo menos m elementos, para $1 \leq m \leq n$.

Problema 50. (Bulgária) Um tabuleiro $n \times n$ é preenchido com 0's e 1's de modo que subconjunto de n quadradinhos, em que quaisquer dois não estão em uma mesma linha ou coluna, contém pelo menos um 1. Prove que existem i linhas e j colunas com $i + j \geq n + 1$ cuja interseção contém somente 1's.