XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível 2

Grafos

Matheus Secco

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

impa
instituto nacional de matemática pura e aplicada

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

fundação lemann

Olimpíada Brasileira de Matemática

Grafos

N2 – Professor Matheus Secco

1 Contagens úteis

Teorema 1 *Em um grafo G, a soma dos graus de seus vértices é igual ao dobro do número de arestas, isto é,*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2A$$

Demonstração: Vamos contar de duas maneiras o número L de pares ordenados (u, v), onde u e v são vértices de G tais que u está conectado a v. Por um lado, o número de pares pode ser contado escolhendo primeiro o vértice v. Feito isso, há $\deg(v)$ maneiras de escolhermos u. Logo

$$L = \sum_{v \in V} \mathbf{deg}(v)$$

Por outro lado, como estamos contando pares ordenados, $L = 2A$, o que mostra que

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2A$$

. $\square$

Exemplo 1 *(Banco IMO 1995) Em uma reunião com $12k$ pessoas, cada uma cumprimenta exatamente outras $3k + 6$ pessoas. Para cada duas pessoas, o número de pessoas que cumprimentou ambas é sempre o mesmo. Quantas pessoas estavam na reunião?*

Solução: Seja n o número de pessoas que cumprimentou duas pessoas quaisquer. Contaremos de duas maneiras o número T de triplas ordenadas (A, B, C) tais que A cumprimentou B e A cumprimentou C (esta ideia é bastante útil, estamos contando o número de chifres do grafo).

Por um lado, podemos iniciar a contagem escolhendo a pessoa A. A pessoa A pode ser escolhida de $12k$ maneiras. Feito isso, podemos escolher o par (B, C) de $(3k + 6)(3k + 5)$ maneiras. Desta maneira, obtemos

$$T = 12k(3k + 6)(3k + 5)$$

De uma segunda forma, podemos iniciar a contagem escolhendo um par (B, C). Este par pode ser escolhido de $12k(12k - 1)$ maneiras. Feito isso, podemos escolher A de n maneiras, pois A deve conhecer B e C. Assim, temos

$$T = 12nk(12k - 1)$$

Comparando as duas contagens feitas, chegamos a

$$12k(3k+6)(3k+5) = 12nk(12k-1) \Leftrightarrow n = \frac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1}$$

Como n é um número inteiro, $12k-1|9k^2+33k+30$. Manipulando a divisibilidade, chegamos a $12k-1|525$. A única possibilidade é $k=3$ e, portanto, o número de pessoas na reunião é igual a 36. $\square$

1.1 Problemas

Problema 1 (Treinamento Cone Sul 2008) Em um torneio de tênis com 14 jogadores, cada um joga com todos os outros exatamente uma vez e não há empates. Prove que é possível escolher 3 jogadores para os quais qualquer um dos outros 11 times perdeu para pelo menos um desses 3.

Problema 2 (IMC 2002) Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática, onde havia 6 problemas para serem resolvidos. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 participantes. Prove que necessariamente há dois estudantes para os quais todo problema foi resolvido por pelo menos um deles.

Problema 3 (Rioplatense 2008) Dizemos que um grupo de três pessoas é **simétrico** se cada uma conhece as outras duas ou se cada uma não conhece nenhuma das outras duas. Em uma festa, há 20 pessoas e cada uma conhece exatamente 9 outras pessoas da festa. Determine o número de grupos simétricos de três pessoas nesta festa.

Problema 4 (Teste Cone Sul 2013) Existem 25 casas em Colorândia. Sabe-se que entre quaisquer duas casas, existe um único caminho e que este está pintado de alguma cor. Além disso, para quaisquer três casas, sempre existem dois caminhos de uma mesma cor partindo de uma delas em direção às outras duas. Prove que existe uma casa da qual partem pelo menos 10 caminhos de uma mesma cor para outras casas de Colorândia.

Problema 5 (Iberoamericana 2002) Dado qualquer conjunto de 9 pontos no plano, entre os quais não há três colineares, demonstre que para cada ponto P do conjunto, o número de triângulos que têm como vértices três dos oito pontos restantes e P no seu interior é par.

Problema 6 Na Terra de Oz, há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos A, B, C e D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro do castelo e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer, o número de estradas deve ser menor ou igual a $\dfrac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}$.

Problema 7 (Cone Sul 2013) Semciclolândia é um país com 500 cidades e 2013 estradas de mão dupla, cada uma conectando diretamente duas cidades. Duas cidades A e B são chamadas de **vizinhas** se existe uma estrada que as conecta e duas cidades A e B são chamadas de **quase-vizinhas** se existe uma cidade C tal que A é vizinha de C e C é vizinha de B. Sabemos que em Semciclolândia, não existem duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada e não existem quatro cidades A, B, C e D tais que simultaneamente A é vizinha de B, B é vizinha de C, C é vizinha de D e D é vizinha de A. Demonstrar que existe uma cidade que é quase-vizinha de pelo menos 57 cidades.

2 Conexidade e ciclos

2.1 Definições

Definição 1 *Um **caminho** em um grafo é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que v_i é adjacente a v_{i+1}, para $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Um caminho é dito simples se nenhum dos vértices se repete.*

Definição 2 *Um **ciclo** de tamanho n é um caminho cujos vértices são $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. O único vértice que se repete é v_1.*

Definição 3 *Um grafo é dito **conexo** se para quaisquer dois vértices u e v do grafo, existe um caminho que liga tais vértices.*

Definição 4 *Dado um grafo G e um vértice v em G, a **componente conexa** de v em G é o conjunto dos vértices para os quais há um caminho que os conecta com v.*

Definição 5 *Uma **folha** em um grafo é um vértice de grau um.*

Definição 6 *Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos.*

2.2 Resultados Clássicos

Teorema 2 *Todo grafo pode ser dividido em um conjunto de componentes conexas*

Demonstração: Sejam A e B dois vértices do grafo. Representaremos a componente conexa de um vértice X por $C(X)$. Vamos provar inicialmente que $A \in C(B)$ se, e somente se, $B \in C(A)$. Pela simetria do problema, basta provar a ida. Supondo então que $A \in C(B)$, temos que existe um caminho conectando B até A. Considerando o caminho reverso, obtemos um caminho conectando A até B, o que mostra que $B \in C(A)$. Para terminar, provaremos que se $A \notin C(B)$, então $C(A)$ e $C(B)$ não possuem vértices em comum e não há arestas conectando um vértice de $C(A)$ a um v[ertice de $C(B)$. Para a primeira parte, por absurdo, suponhamos que exista um vértice $X \in C(A) \cap C(B)$. Desta forma, existe um caminho conectando A até X e um caminho conectando X até B. Juntando os dois caminhos, obtemos que há um caminho conectando A até B, o que contradiz $A \notin C(B)$. Para a segunda parte, novamente por absurdo, suponhamos que existam vértices $X \in C(A)$, $Y \in C(B)$ tais que XY é uma aresta. Desta maneira, há um caminho de A até X e um caminho de Y até B. Justapondo estes dois caminhos com a aresta XY como intermediária, obtemos um caminho de A até B, o que novamente contradiz $A \notin C(B)$. Isto conclui a prova. $\square$

Teorema 3 *Ao retirarmos uma aresta de uma árvore, o novo grafo obtido passa a ser desconexo.*

Demonstração: Se a retirada de uma aresta uv do grafo não o desconectar, há um caminho de u até v que não utiliza a aresta uv. Colocando a aresta uv de volta, obtemos um ciclo, e portanto, o grafo original não seria uma árvore, absurdo. $\square$

Teorema 4 *Ao acrescentarmos uma aresta a uma árvore, surge um ciclo no novo grafo.*

Demonstração: Seja uv a aresta acrescentada à árvore. O grafo sem a aresta uv é conexo e, portanto, há um caminho de u até v. Ao adicionarmos a aresta uv, necessariamente obteremos um ciclo de u até v, como queríamos. $\square$

Teorema 5 *Todo grafo conexo* G *possui uma árvore que contenha todos os vértices de* G*. Tal árvore é chamada de* ***árvore geradora*** *do grafo* G*. (Um mesmo grafo pode possuir diversas árvores geradoras diferentes).*

Demonstração: Se G não possuir ciclos, G é uma árvore e o problema acaba. Se G possui um ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$, ao retirarmos a aresta v_1v_k, o subgrafo G' obtido permanece conexo. De fato, sejam h_1 e h_2 vértices de G. Como G é conexo, há um caminho de h_1 até h_2. Se este caminho não utilizar a aresta v_1v_k, G' claramente permanece conexo. Caso o caminho utilize a aresta v_1v_k, podemos trocá-la pelo caminho $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ sempre que necessário. Desta maneira, não usaremos mais a aresta v_1v_k e o grafo G' permanece conexo. Se repetirmos este processo até que não haja mais ciclos, obteremos a árvore geradora desejada. $\square$

Teorema 6 *Toda árvore possui pelo menos uma folha.*

Demonstração: Sendo G a árvore, suponha que todo vértice possui grau maior ou igual a 2. Seja agora $v_1, v_2, \ldots, v_k$ o maior **caminho simples** de G. Como $\deg(v_1) \geqslant 2$, existe um vértice u conectado a v_1. Por outro lado, veja que u é distinto de v_i para $1 \leqslant i \leqslant k$, pois senão teríamos um ciclo. Desta maneira, o caminho $u, v_1, v_2, \ldots, v_k$ é simples e possui comprimento maior que o o caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$, o que contraria a maximalidade deste último. $\square$

Teorema 7 *Toda árvore com* n *vértices possui exatamente* $n-1$ *arestas.*

Demonstração: Faremos indução no número de vértices (aqui cabe uma pausa para comentarmos que, em geral, ao fazermos indução em grafos, retiramos vértices/arestas e não colocamos. Fazemos isso, pois ao colocar um vértice ou aresta, devemos estudar todas as possibilidades para ele, o que pode gerar muito trabalho. Ao retirar um vértice ou aresta, podemos escolher alguém com alguma propriedade interessante). O caso inicial $n = 1$ é trivial. Suponha então que o resultado é válido para qualquer árvore com n vértices e consideremos uma árvore G com $n+1$ arestas. Seja f uma folha de G. Como f é folha, o grafo G' obtido retirando-se f é ainda uma árvore e, pela hipótese de indução, G' possui $n-1$ arestas. Desta maneira, o grafo original G possui $n-1+1 = n$ arestas, como queríamos. $\square$

Teorema 8 *Todo grafo conexo com* n *vértices possui pelo menos* $n-1$ *arestas e a igualdade ocorre se, e somente se, o grafo é uma árvore.*

Demonstração: Sendo G o grafo, pelo teorema 4, sabemos que G possui uma árvore geradora T. Como G possui n vértices, T possui n vértices e, pelo teorema 6, possui $n-1$ arestas. Com isso, como toda aresta de T é aresta de G, segue que G possui pelo menos $n-1$ arestas. Para que ocorra a igualdade, G deve ser igual a T e assim G é uma árvore, como queríamos. $\square$

Teorema 9 *Todo grafo* G *com* n *vértices e pelo menos* n *arestas possui um ciclo.*

Suponha que G não possua ciclos e sejam $C_1, \ldots, C_k$ suas componentes conexas, $k \geqslant 1$. onde C_i tem x_i vértices. Como G não possui ciclos, cada $C_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ é uma árvore e, portanto C_i possui $x_i - 1$ arestas. Logo o número de arestas de G é

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - 1) = n - k < n,$$

o que é um absurdo.

Demonstração:

□

Exemplo 2 *(OBM Fase 2 N3 2007) Em um certo país, há* 21 *cidades e o governo pretende construir* n *estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de* n *para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?*

Solução: Queremos encontrar o menor número de arestas que um grafo de 21 vértices deve ter para garantir que ele é conexo. Considerando um grafo com 20 vértices, todos conectados entre si, e 1 vértice isolado, temos que este grafo não é conexo e possui $\binom{20}{2} = 190$ arestas. Desta maneira, obtemos que $n \geqslant 191$.

Provaremos agora que todo grafo com 21 vértices e 191 arestas é conexo. Suponha por absurdo que um grafo G com 191 arestas e 21 vértices não é conexo. Desta maneira, G possui pelo menos 2 componentes conexas. Aglutinando componentes conexas, se necessário, podemos dividir G em dois conjuntos A e B com a e b ($a+b = 21$) elementos, respectivamente, de maneira que não haja arestas ligando vértices de A até B.

Com isto, o número máximo de arestas em G é $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$ e, assim, obtemos

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} \geqslant 191$$

Logo

$$a^2 + b^2 - a - b \geqslant 382$$

Substituindo $a + b = 21$ e $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 441 - 2ab$, segue que

$$441 - 2ab - 21 \geqslant 382 \Leftrightarrow ab \leqslant 19$$

Como a e b são inteiros positivos tais que $a + b = 21$, o menor valor possível de ab é 20 e chegamos a uma contradição. □

Exemplo 3 *(IMC 1999) São marcados* $2n$ *pontos de um reticulado* $n \times n$*. Prove que para algum* $k > 1$*, podemos selecionar* $2k$ *pontos marcados distintos, digamos* $a_1, \ldots, a_{2k}$ *de maneira que* a_1 *e* a_2 *estão na mesma linha,* a_2 *e* a_3 *estão na mesma coluna,* $\ldots$*,* a_{2k-1} *e* a_{2k} *estão na mesma linha e* a_{2k} *e* a_1 *estão na mesma coluna.*

Solução: Seja G um grafo onde os vértices são as linhas e as colunas do reticulado. Uma linha l está conectada com uma coluna c se o ponto de interseção de l e c estiver marcado. Este grafo possui $2n$ vértices e $2n$ arestas. Pelo **Teorema 9**, G deve possuir um ciclo. Por construção, um ciclo é uma sequência alternante de linhas e colunas, e a interseção de cada linha e coluna adjacentes é um ponto marcado. A sequência desejada consiste então nestes pontos de interseção do ciclo. □

2.3 Problemas

Problema 8 (Clássico)Prove que toda árvore possui pelo menos duas folhas.

Problema 9 Em um grafo G, o grau de cada vértice é pelo menos $k \geqslant 2$. Prove que G possui um ciclo de tamanho pelo menos $k + 1$.

Problema 10 (IMO 1990) Seja $n \geqslant 3$ e considere um conjunto E de $2n-1$ pontos distintos em um círculo. Suponha que exatamente k desses pontos serão coloridos de preto. Uma coloração é dita *boa* se existe pelo menos um par de pontos pretos tais que o interior de um dos arcos determinados por eles contem exatamente n pontos de E. Encontre o menor valor de k de modo que toda coloração de k pontos de E seja boa.

Problema 11 (Rússia 2000) Em um grafo, cada vértice tem grau pelo menos 3. Prove que existe um ciclo neste grafo cujo tamanho não seja divisível por 3.

Problema 12 (Peru 2009) Ao redor de uma mesa redonda, sentam-se $2n$ peruanos, $2n$ bolivianos e $2n$ equatorianos. Pede-se que fiquem de pé todos aqueles que tem como vizinhos, à direita e à esquerda, pessoas da mesma nacionalidade. Qual é o maior número de pessoas que podem ficar de pé?

Problema 13 (Teste IMO 2009) As cidades de Terra Brasilis são conectadas por algumas estradas. Não há duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada. Sabe-se que é possível ir de uma cidade para qualquer outra utilizando uma ou mais estradas. Chamamos de **rolê** qualquer rota fechada de estradas (isto é, que começa em uma cidade e termina na mesma cidade) que não passa por uma cidade mais de uma vez. Na Terra Brasilis, todos os rolês passam por quantidades ímpares de cidades.

O governo de Terra Brasilis decidiu fechar alguns rolês para reforma. Ao fechar um rolê, todas as suas estradas são interditadas, de modo que não é permitido o tráfego nessas estradas. Ao fazer isso, a Terra Brasilis ficou dividida em várias regiões de modo que de qualquer cidade de cada região é possível chegar a qualquer outra da mesma região através de estradas, mas não é possível chegar a cidades de outras regiões. Prove que o número de regiões é ímpar.

Problema 14 (Bay Area 2005) Existem 1000 cidades no reino de Euleria e alguns pares de cidades são ligados por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Euleria pode pavimentar algumas estradas de maneira que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Problema 15 (Leningrado 1990) Há 100 cidades no reino de Olímpia e cada par delas é conectada por uma rodovia de mão única. Foi descoberto que a propriedade da conexidade (ser capaz de dirigir de uma cidade para qualquer outra seguindo os sentidos das estradas) é falha. Prove que o rei pode acabar com este problema se ele escolher uma das cidades e trocar as direções de todas as estradas que chegam ou partem dessa cidade.

Problema 16 (Leningrado 1988) Em um país, há n cidades que são conectadas por $2n-1$ rodovias de mão única. Sabe-se que dadas duas cidades quaisquer, é possível viajar de uma a outra através das rodovias. Prove que existe uma rodovia que pode ser fechada, preservando a condição anterior.

Problema 17 (Leningrado 1991) Em uma conferência, cada participante é amigo de pelo menos um outro participante, e para quaisquer dois participantes, existe um outro que não é amigo destes dois. Prove que é possível dividir os participantes em três grupos de maneira que cada participante seja amigo de pelo menos uma pessoa em seu grupo.

Problema 18 (IMO 2006) Uma diagonal de um polígono regular P de 2006 lados é um **segmento bom** se separa P em duas partes, cada uma tend um número ímpar de lados de P. Os lados de P também são **segmentos bons**.

Divide-se P em triângulos, traçando-se 2003 diagonais tais que, duas a duas, não se cortam no interior de P. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

Problema 19 (Clássico) Dizemos que um grafo G é bipartido se podemos dividir os vértices de G em dois conjuntos U e V tais que toda aresta conecta um vértice em U a um vértice em V. Prove que um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar.

Problema 20 (Bulgária 2004) Um grupo consiste de n turistas. Dentre quaisquer três deles, existem pelo menos dois que não se conhecem. Para qualquer partição do grupo em dois ônibus, existe pelo menos um par de turistas conhecidos no mesmo ônibus. Prove que existe um turista que conhece no máximo outros $\frac{2n}{5}$ turistas.