VIII Semana Olimpíada da Olimpíada Brasileira de Matemática
21 a 28 de Janeiro de 2005 - Ibiúna-SP
Palestrante: Tertuliano Franco

Grupos e Análise Combinatória: A Fórmula de Polya

Problema 1. *De quantas maneiras pode-se pintar uma roleta de seis compartimentos, dispondo apenas das cores branco, azul e vermelho?*

Este problema não é trivial como o problema das permutações circulares em torno de um uma mesa, devido ao fato de existir coincidências quando se roda a roleta. Este número de coincidências depende de cada configuração. E depende, especialmente, das simetrias da roleta.

Definição 1. *Um grupo finito G é um conjunto finito sobre o qual existe uma operação interna bem definida que satisfaz as propriedades:*

Associatividade $a(bc) = (ab)c$.

Elemento neutro *Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$.*

Elemento inverso *Todo elemento a possui um elemento inverso a^{-1}, tal que $a * a^{-1} = e$.*

No nosso caso, o grupo é o das rotações dessa roleta, que chamaremos de $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_5\}$. ($g_0$ é uma rotação de zero graus, g_1 uma rotação de 60º, g_2 uma rotação de 120º,..., g_5 é uma rotação de 300º).

Definição 2. *Existe uma ação de um grupo G sobre um conjunto X se a cada $g \in G$ e a cada $x \in X$ podemos associar um único elemento de X, denotado por $g \cdot x$, tal que:*

1. *Se e é o elemento neutro de G, $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.*
2. *Se g_1 e g_2 são elementos de G, e $g_1 g_2$ é o produto em G, então, para todo $x \in X$:*

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$$

No problema que estamos analisando, X é o conjunto dos elementos das 3^6 possíveis roletas. Note que estamos numerando cada casa da roleta.

Dado um $x \in$ fixo, o conjunto de todos os elementos de X que se obtêm como $g \cdot x$ para os distintos $g \in G$ é chamado de órbita de x sob G, isto é:

$$G \cdot x = \{g \cdot x;\ g \in G\} \subseteq G$$

O número que procuramos é o número de órbitas!! Estudaremos agora a equação

$$g \cdot x = x \ \ (\text{com } g \in G \text{ e } x \in X)$$

que tem relação com as simetrias do problema. Vamos contar o número de soluções de dois modos: quantos x há para cada g e depois quantos g há para cada x. Para cada $g \in G$ fixo, o conjunto dos x que satisfazem à equação dada para este g chama-se Fix (g), isto é:

$$\text{Fix }(g) = \{x \in X;\ g \cdot x = x\}$$

Em segundo lugar, para $x \in X$ fixo, o conjunto das $g \in G$ que satisfazem à equação chama-se o *estabilizador de x em G*, e é denotado por G_x:

$$G_x = \{g \in G;\ g \cdot x = x\}$$

Daí, $\sum_{g \in G} |\text{Fix }(g)| = \sum_{x \in X} |G_x|$. Usaremos agora alguns resultados sem suas respectivas demonstrações.

- Se x_1 e x_2 estão numa mesma órbita, $|G_{x_1}| = |G_{x_2}|$. (Para mostrar isso, basta fazer uma bijeção entre G_{x_1} e G_{x_2}, sendo suficientes as definições já dadas.)
- Para qualquer $x_1 \in X$, $|G_{x_1}| \cdot |G \cdot x_1| = n$, o número de elementos do grupo G. (Conseqüência imediata de um teorema básico em Teoria de Grupos, o Teorema de Lagrange.)

Agrupando os x que pertencem a uma mesma órbita, temos que a soma total é da forma:

$$|G_{x_1}| \cdot |G \cdot x_1| + \cdots + |G_{x_t}| \cdot |G \cdot x_t|$$

onde t é o número de órbitas. Em conseqüência, $t \cdot n = \sum_{g \in G} |\text{Fix }(g)| \Rightarrow$

$$t = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |\text{Fix }(g)|$$

Agora que já obtivemos a fórmula necessária, voltemos à roleta:

$$\begin{array}{rclcrcl} |\text{Fix }(g_0)| & = & 3^6 & \qquad & |\text{Fix }(g_3)| & = & 3^3 \\ |\text{Fix }(g_1)| & = & 3 & & |\text{Fix }(g_4)| & = & 3^2 \\ |\text{Fix }(g_2)| & = & 3^2 & & |\text{Fix }(g_5)| & = & 3 \end{array}$$

E o número de roletas é dado por:

$$t = \frac{3^6 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3}{6} = 130$$

Referências

[1] Rotmann, *An Introduction to the Theory of Finite Groups.*

[2] Fraleigh, John B., *A First Course in Abstract Algebra.*

[3] Hungeford, T., *Algebra.* Ed. Springer-Verlag.