História dos Determinantes – Fontes Primárias

Carlos Gonçalves

1 Gauss

Uma forma

$$axx + 2bxy + cyy,$$

quando as indeterminadas x, y não estiverem em questão, designaremos

$$(a, b, c).$$

Se o número M pode ser representado pela forma (a, b, c), de modo que os valores das indeterminadas sejam primos entre si, $bb - ac$ será um resíduo quadrático do número M.

Demonstração: Sejam os valores das indeterminadas m, n, ou seja,

$$amm + 2bmn + cnn = M,$$

e sejam tomados números μ, ν de modo que

$$\mu m + \nu n = 1.$$

Então facilmente prova-se que

$$(amm + 2bmn + cnn)(a\nu\nu - 2b\mu\nu + c\mu\mu) = (\mu(mb + nc) - \nu(ma + nb))^2 - (bb - ac)(m\mu + n\nu)^2,$$

ou

$$M(a\nu\nu - 2b\mu\nu + c\mu\mu) = (\mu(mb + nc) - \nu(ma + nb))^2 - (bb - ac)(m\mu + n\nu)^2.$$

Por isso será

$$bb - ac \equiv (\mu(mb + nc) - \nu(ma + nb))^2 (\text{mód } M),$$

isto é, $bb - ac$ é um resíduo quadrático do próprio M.

O número $bb - ac$, de cuja índole as propriedades de (a, b, c) dependem em primeiro lugar, chamaremos determinante dessa forma.

Se uma forma F cujas indeterminadas são x, y pode ser transformada em outra F' cujas indeterminadas são x', y' por substituições tais que

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

de forma que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sejam inteiros, dizemos que a primeira acarreta a segunda, ou a segunda é contida pela primeira. Seja a forma F' a

$$a'x'x' + 2b'x'y' + cy'y'$$

e tenham-se as três equações seguintes:

$$a' = a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma\gamma$$

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta$$

$$c' = a\beta\beta + 2b\beta\delta + c\delta\delta$$

Multiplicando a segunda equação por ela mesma, a primeira pela terceira, e subtraindo obtemos

$$b'b' - a'c' = (bb - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

2 Cauchy

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ várias quantidades diferentes em número igual a n. Vimos acima que, multiplicando o produto dessas quantidades ou

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

pelo produto de suas respectivas diferenças, ou por

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}),$$

obtemos como resultado a função simétrica alternada

$$S(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n)$$

que, em conseqüência, encontra-se sempre igual ao produto

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$$

Suponhamos agora que desenvolvemos este último produto e que, em cada termo do desenvolvimento, substituímos o expoente de cada letra por um segundo índice igual ao expoente de que se trata; escrevendo, por exemplo, $a_{r,s}$ no lugar de a_r^s e $a_{s,r}$ no lugar de a_s^r, obteremos como resultado uma nova função simétrica alternada que, no lugar de ser representada por

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n)$$

será representada por

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n}),$$

sendo o sinal S relativo aos primeiros índices de cada letra. Tal é a forma mais geral das funções que designarei na seqüência pelo nome *determinantes*. Se supusermos sucessivamente

$$n = 1, n = 2, \ldots,$$

encontraremos

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2}) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}$$

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}) = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3}$$

$$-a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3}$$

....

para os determinantes de segunda ordem, terceira etc.

3 Jacobi

Tendo sido propostas as $(n+1)^2$ quantidades

$$a_k^{(i)},$$

nas quais tanto os índices superiores (i) como os inferiores k percorrem todos os valores $0, 1, 2, \ldots, n$, seja produzido o termo

$$a a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)};$$

a partir dele forme-se um número $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)$ de termos semelhantes permutando entre si, de todos os modos, ou os índices superiores ou os inferiores. E ainda seja anteposto a cada termo o sinal positivo ou negativo, segundo as Permutações pelas quais são obtidos a partir do termo $aa'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}$ sejam positivas ou negativas, e seja feito um Agregado de todos os $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)$ termos anexados aos seus sinais, que designarei por

$$R = \sum \pm aa'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}$$

Desse modo o Agregado R, seguindo o ilustre Gauss e outros, chamarei *Determinante*, as próprias quantidades $a_k^{(i)}$ *elementos* do Determinante, e como qualquer termo do próprio R é produzido a partir de $n+1$ elementos, direi que o R mesmo é um Determinante do $(n+1)-$ésimo grau.

4 Weierstrass

Weierstrass parte de um sistema linear de n equações e n incógnitas, com coeficientes $a_{\alpha\beta}$. Ele põe o problema de encontrar uma função A das quantidades $a_{\alpha\beta}$ com as seguintes características:

1. A é uma função linear homogênea com relação aos elementos de cada linha.

2. A troca apenas de sinal sempre que duas linhas são permutadas entre si.

3. Se $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ e todos os outros elementos são igualados com 0, então o valor de A é 1.

Inicialmente Weierstrass demonstra que 1. e 2. são equivalentes a 1. e 2'.

2'. $A = 0$ se duas linhas são iguais.

Por fim, ele demonstra que A está unicamente determinada por essas características e é idêntica ao determinante.

Referências

[1] GAUSS, C.F. Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig: G.Fleisher, 1801.

[2] CAUCHY, A.L. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transposition opérées entre les variables qu'elles renferment. *Journal de l'École polythnique 17e cahier 10*, 1815.

[3] JACOBI, C.G.J. De formatione et proprietatibus determinantium. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 22*, 285-318.

[4] WEIERSTRASS, K. Zur Determinantentheorie. Publicada postumamente em *Mathematische Werke*, vol III, 271-287, J.Knoblauch, Ed. Berlin: Mayer & Müller, 1903.