Identidades Algébricas e Aplicações

Semana Olímpica

Cleuber Nascimento

1- A ferramenta...

Usaremos fortemente nesse texto o polinômio Interpolador de Lagrange que é representado na formalmente como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j\neq i}^{n} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

Dessa forma assusta, não é? Então vamos fazer uma aplicação em alguma identidade e depois provaremos sua existência.

Exemplo. *Prove que* $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$

Demonstração. Tome o polinômio acima, ou seja, $f(x) = \frac{f(x_1)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(x_2)(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(x_3)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

Fazendo $f(0) = \frac{f(x_1)bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(x_2)ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(x_3)ab}{(c-a)(c-b)} \Longrightarrow f(a) = \frac{1}{bc} = \frac{a}{abc} = ka$, $f(b) = kb$ *e* $f(c) = kc$, *onde* $k = \frac{1}{abc}$. *Por isso vamos definir* $g(x) = f(x) - kx$, *para todo* x. *Agora veja que* $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. *Logo* $g(x) \equiv 0$ *e então* $f(x) = kx$, *segue* $f(0) = 0$. □

Teorema. *Se* $x_1,x_2,..,x_m$ *são arbitrários,* $f(x)$ *é um polinômio de grau menor que* m, *então existe a identidade*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j\neq i}^{n} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

Demonstração. Escrevemos $g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j\neq i}^{n} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$, *logo temos que provar que* $g(x) \equiv 0$. *De fato o grau de* $g(x)$ *é* $m-1$ *e se assumirmos* x *assumir* $x_1,x_2,...,x_m$ *temos* $g(x) \equiv 0$. *E portanto segue a indentidade.* □

Aplicações Interessantes

Problema 1. *Seja M um ponto no plano do triângulo ABC, mostre que:*

$$AM^3.senA + BM^3.senB + CM^3.senC \geq 6MG.área[ABC],$$

onde G é o baricentro do triângulo.

Problema 2. $(VIISilkRoadMathematicalCompetition2008)$*. Determine todos os polinômios $P(x)$ de coeficientes reais tais que, para algum racional r a equação $P(x) = r$ tem solução racional.*

Problema 3.*(DesigualdadedePtolomeu) Para quatro pontos no plano A,B,C e D, prove:*

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA$$

Problema 4. *Seja ABC um triângulo ABC. Prove que se M é algum ponto no plano, então:*

a) $AM.senA \leq BM.senB + CM.senC$

b) Seja A_1, B_1 e C_1 pontos que pertencem aos lados BC, AC e AB respectivamente formando um triângulo $A_1B_1C_1$ que possuem ângulos internos α,β e γ. Prove que:

$$\sum_{cyc} AA_1 sen\alpha \leq \sum_{cyc} BC sen\alpha$$

Problema 5.*Seja G baricentro do triângulo ABC de modo que as circunferências que passam por $\triangle GAB$, $\triangle GBC$ e $\triangle GAC$ tem raios R_1, R_2,R_3. Prove que $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.*

Problema 6.*(SelectionandTrainingSession). Seja I o incentro do triângulo ABC, A_1,B_1e C_1 são interseções do circuncírculo do triângulo ABC com as retas AI, BI e CI, respectivamente. Prove que:*

a) $\frac{AI}{IA_1} + \frac{BI}{IB_1} + \frac{CI}{IC_1} \geq 3$

b) $AI.BI.CI \leq I_1A_1.I_1B_1.I_1C_1$

Problema 7.*(IMO Shortlist) Seja M e N são pontos internos do triângulo ABC tal que $M\widehat{A}B = N\widehat{A}C$ e $M\widehat{B}A = N\widehat{B}C$. Prove que:*

$$\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$$

Problema 8.$(ChineseMathematicalOlympiad - 1998)$ *Seja ABC o triângulo agudo e seja P um ponto interior. Prove que:*

$$l_A.PB.PC + l_B.PC.PA + l_C.PA.PB = l_Al_Bl_C$$

se somente se P ortocentro do triângulo onde l_A, l_B e l_C são os lados.