Invariantes – Como Algo que não Muda Mudará Sua Vida

Davi Lopes – Fortaleza, CE

XV Semana Olímpica – Maceió, AL

Nível 1 – 27 de Janeiro de 2012

1. Introdução

Como o próprio nome sugere, este material fala sobre coisas que não mudam. Essa frase foi muito vaga, mas a matéria é bem vasta e ampla mesmo, pois a matemática apresenta muitas invariantes. Um exemplo óbvio é o bom e velho fato de que a ordem das parcelas não altera a soma (isso pode ser considerada uma invariante, pois mudamos as parcelas de lugar na hora de fazer a soma, mas o resultado final deu o mesmo). O mesmo pode ser dito quando falamos que a ordem dos fatores não altera o produto. Na geometria, as invariantes são ainda mais evidentes: quando você recorta uma figura em vários pedaços, a soma das áreas desses pedaços permanece constante, e é igual á área da figura inicial. Podemos dizer o mesmo sobre um cubo que foi dividido em vários cubinhos, por exemplo, ou então quando tomamos uma corda e montamos figuras diferentes com ela (neste caso, o perímetro das figuras é a invariante, pois ele é igual ao comprimento da corda).

O fato é que, na verdade as invariantes são muito presentes na matemática e na nossa vida diária, já que o ser humano busca se guiar através de padrões, sejam eles padrões de convivência social, padrões étnicos e outros (Na filosofia, isso é caracterizado como invariantes axiológicas, e nisso a matemática tem grande influência! Entretanto, não vou me aprofundar nesse assunto...).

Legal! Aprendi o que significa invariante, agora posso largar esse material e me gabar por ser o rei das invariantes, certo? Errado! A invariante muda de problema a problema, e cada questão que envolve invariante é um desafio à parte. Então, isso significa que não existe um "teorema mágico" que resolva todos os problemas sobre invariantes, o que é, a princípio, frustrante, já que para resolver um problema desses, pode ser necessária muita inspiração e sorte...

Que pena... Então os problemas de invariantes são problemas praticamente impossíveis, se formos pensar assim. Acontece que existem técnicas que permitem detectar as invariantes e, mais ainda, resolver problemas difíceis usando as invariantes encontradas. Como dominar essas técnicas? A gente vai ver a partir de agora!

2. Invariantes Básicas

Em muitos problemas que envolvem transformações de alguns números em outros, a primeira ideia que você deve ter é procurar uma invariante, pois as operações mudam os números, mas, em meio a mudanças aleatórias aparentemente sem sentido, deve existir algo que mantém algum padrão, algo constante, e esse algo é a invariante. Um exemplo bem fácil:

Exemplo 1: Escrevemos os números de 1 até 10 em um quadro. A cada passo, escolhemos dois números quaisquer do quadro e trocamos esses pela soma deles. Ao final, vai sobrar somente um número. Quem é esse número?

Solução: Perceba que a operação muda os números, mas não muda a soma de todos eles. Então, a soma dos números é a nossa invariante. Como no fim só resta um número, ele só pode ser igual à soma dos 10 iniciais, logo o número é:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55 \blacksquare$$

Tudo bem... Esse exercício é bem fácil, mas ele ilustra como uma invariante pode acabar rapidinho com um problema. Agora, que tal vermos um exemplo onde a invariante está mais escondida?

Exemplo 2: Escrevemos os números de 1 a 10 numa lousa. A cada passo, trocamos dois números da lousa a e b pelo número $\sqrt{a^2 + b^2}$. Qual é o número que vai ficar no final, independentemente das operações?

Solução: Aqui a invariante não está mais tão na cara como no exemplo 1. Então qual a invariante? Neste caso, a invariante é a soma dos quadrados dos números da lousa, pois, ao fazermos uma transformação, se S é a soma dos quadrados dos números não escolhidos, então podemos dizer que:

- A soma dos quadrados antes era igual a $S + a^2 + b^2$;
- A soma depois é igual a $S + \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = S + a^2 + b^2$

Então a soma dos quadrados realmente se conserva. Com isso, se x é o número que vai restar no final, temos que, comparando as situações inicial e final:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385 \Rightarrow x = \sqrt{385} \blacksquare$$

Em geral, não há uma regra fixa para você achar uma invariante para cada problema que você vê por aí. Então, a única maneira de você desenvolver a habilidade de encontrar invariantes é vendo diversos exemplos (Há muitos exercícios resolvidos nos matérias das referências bibliográficas) e treinando bastante. E é para isso que servem os:

Exercícios

1. Temos numa lousa os inteiros de 1 a $4n - 1$, onde n é um natural. Em cada passo devemos substituir dois inteiros pela sua diferença. Prove que um inteiro par restará após $4n - 2$ passos.
2. Nove casas 1×1 de um tabuleiro 10×10 estão infectadas pelo vírus quadriculado. A cada segundo, uma casa que possui duas casas vizinhas (com um lado em comum) infectadas também se torna infectada. É possível todas as casas se tornarem infectadas?
3. Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.
4. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e as virar ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?
5. Os números 1, 2, 3, ..., 1989 são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?
6. Os números 1, 2, ..., 20 são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles a e b e escrever no lugar o número a+b+ab. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?
7. Começando com a tripla {3, 4, 12} podemos a cada passo escolher dois número a e b e trocá-los por $0.6a - 0.8b$ e $0.8a + 0.6b$. Usando essa operação podemos obter {4, 6, 12}?
8. Em um tabuleiro 8 × 8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?
9. Em um tabuleiro 3 × 3 uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?
10. Em um tabuleiro 8 × 8 as quatro casas do canto estão pintadas de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?
11. Dado um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ podemos fazer as seguintes operações:

    (i) Trocar a com c.
    (ii) Tocar x por x + t onde t é um real.

Usando essas operações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

12. (Fortaleza/2003) Sobre uma circunferência tomamos $(m + n)$ pontos, que a divide em $(m + n)$ pequenos arcos. Nós pintamos *m* pontos de branco e os *n* restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos $(m + n)$ arcos um dos números 2, 1/2 ou 1, dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca. Calcule o produto dos números associados a cada um dos $(m + n)$ arcos.
13. (Bulgária/2004) Considere todas as “palavras” formadas por a’s e b’s. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco *aba* por um bloco *b*, trocar um bloco *bba* por um bloco a. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a sequência $b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ a partir de $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$?
14. (OBM/2004) Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto em um quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete esse procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas duas pilhas são multiplicadas e o produto escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter apenas pilhas com 1 pedra cada. Quais são os possíveis valores da soma de todos os produtos escritos no quadro?

3. Estudo de Padrões e Falsas Invariantes

Você já deve ter percebido que, em geral, os problemas que perguntam se é possível obter alguma coisa a partir de uma situação dada possuem resposta negativa (Ou seja, quase sempre a resposta é: “Não é possível”). Entretanto, alguns problemas fogem a essa tendência então muito cuidado!

Exemplo 3: Temos os números 2048 e 1024, nesta ordem, numa lousa. A cada passo, se trocamos os dois números a e b da lousa por $(3a+b)/4$ e $(a+3b)/4$, é possível obter os números?

(a) 1540 e 1532
(b) 1546 e 1526

Solução: Observe que, como:

$$\frac{3a+b}{4}+\frac{a+3b}{4}=a+b$$

A soma dos dois números da lousa não se altera. Como 2048 +1024 = 3072, e ainda 1540 + 1532 = 1546 + 1526 = 3072, podemos afirmar que... Infelizmente, não podemos afirmar nada, pois não obtemos nenhuma contradição. Então isso significa que ambos os itens são possíveis? Não! Neste caso, precisamos de outros métodos.

A resposta do ítem (a) é sim. Vejas as transformações abaixo:

$$2048 \text{ e } 1024 \ \rightarrow 1792 \text{ e } 1280 \ \rightarrow 1664 \text{ e } 1408 \ \rightarrow 1600 \text{ e } 1472 \ \rightarrow 1568 \text{ e } 1504$$
$$\rightarrow 1552 \text{ e } 1520 \ \rightarrow 1544 \text{ e } 1528 \ \rightarrow 1540 \text{ e } 1532$$

Já no ítem (b), a resposta é não, e dessa vez vamos olhar um padrão de comportamento dos números. A justificativa é o fato de que a diferença entre os números sempre cai pela metade, haja vista que:

$$\frac{3a+b}{4} - \frac{3b+a}{4} = \frac{a-b}{2}$$

Com isso, a diferença inicial é 1024, depois 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, ... (Confira!) e decrescendo. Como 1546 – 1526 = 20, temos que é impossível obtermos esses números ■

As invariantes com certeza são excelentes para resolvermos problemas do tipo: é possível ou não é, devido ao seu poder de detectar contradições. Entretanto, quando não há nenhuma contradição em relação a uma invariante, precisamos ficar de olhos bem abertos, pois podemos precisar de outra ideia ou de outra invariante.

Exercícios

15. O número 123 está na tela do computador de Teddy. A cada minuto o número escrito na tela é somado com 102. Teddy pode trocar a ordem dos dígitos do número escrito na tela quando ele quiser. Ele pode fazer com que o número escrito na tela seja sempre um número de três dígitos?
16. Colocamos os números de 1 a 16 (inclusive) em uma reta na ordem crescente. Podemos escolher dois números e trocá-los de lugar. Podemos obter uma configuração em que a soma de quaisquer dois vizinhos seja um quadrado perfeito?
17. Temos sete moedas ao formando um círculo. Inicialmente, todas estão mostrando a face da coroa. Podemos escolher quaisquer cinco vizinhas e virar-las. É possível fazer com que todas mostrem a face da cara?
18. (Leningrado/1990) Vinte números estão escritos em um círculo. Podemos escolher uma tripla de números consecutivos x, y, z e trocá-la pela tripla x+y,−y, z+y (na mesma ordem). Usando essa transformação é possível obter a sequência [10, 9, 8, ..., 2, 1,−10,−9, ...,−2,−1] a partir da sequência [1, 2, ..., 9, 10,−1,−2, ...,−9,−10]? (os números são dados no sentido horário.)

4. Restos como Invariantes

Quando estudamos restos, percebemos que esse assunto é um prato cheio para invariantes. Por exemplo, somar e subtrair é a mesma coisa que somar, se olharmos o resto da divisão por 2 (Esse propriedade é bem útil em problemas de paridade – aliás, paridade é um tipo de invariante!); se tomarmos um número e permutarmos seus dígitos, seu resto na divisão por 9 não muda (Veja o próximo exercício), dentre outros. Por isso, quando você se deparar com um problema que envolve uma operação com números inteiros, uma boa invariante a ser procurada deve estar relacionada com restos na divisão por algum número.

Exemplo 4: Escrevemos abaixo os números de 1 a 10:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Antes de cada um deles, coloque sinais "+" ou "–", e calcule o resutado final. Por exemplo, temos os resultados:

$$+1+2+3+4-5-6+7+8-9+10=15$$

$$-1-2+3-4-5+6+7-8-9+10=-3$$

É possível dispor os sinais de modo que a soma total dê zero?

Solução: Não é possível. Como $a-b$ tem mesma paridade que $a+b$, ao analisarmos o resto na divisão por 2, podemos trocar todos os sinais por +, e com isso o resto da divisão por 2 de uma expressão qualquer é a mesma de:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

Como 55 é ímpar, as expressões são todas ímpares. Como zero é par, é impossível obtê-lo ■

Exemplo 5: Uma calculadora tem duas teclas e o número 1 na tela. A primeira tecla adiciona 3 ao número mostrado na tela, e a segunda permite que você troque de lugar quaisquer dois dígitos do número da tela. É possível obtermos o número:

$$\underbrace{123456789123456789 \ldots 123456789}_{2012 \; blocos \; 123456789}$$

Na tela da calculadora?

Solução: Perceba que cada operação preserva o resto do número na divisão por 3, uma vez que a primeira só adiciona 3, aumentando o quociente de uma unidade e conservando o resto da divisão, e a segunda operação preserva o resto também, pois o resto da divisão de um número por 3 é o mesmo resto da soma dos seus algarismos, e soma dos algarismos não altera ao trocarmos dois dígitos de lugar. Como o número:

$$123456789123456789 \ldots 123456789$$

Tem soma dos algarismos igual a $2012(1+2+3+\cdots+9)=2012 \text{ x } 45$, que é múltiplo de 3, então o número acima é múltiplo de 3. Como 1 não é múltiplo de 3, então é impossível obter esse número a partir do 1 ■

Exercícios

19. As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocas um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?
20. Seja d(x) a soma dos dígitos de x ∈ N. Determine todas as soluções da equação: $d(d(n)) + d(n) + n = 1997$
21. (Torneio das Cidades) Todo membro de uma sequência, iniciando do segundo, é igual a soma do termo anterior com a soma de seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123456 pertença à sequência?
22. (Hong Kong/1997) Cinco números 1, 2, 3, 4, 5 estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números a e b e escrever nos seus lugares a + b e ab. Após algumas operações podemos obter a quíntupla 21, 27, 64, 180, 540?
23. Cada um dos números a_1, a_2,..., a_n é 1 ou -1, e temos que:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

    Prove que *n* é múltiplo de 4.

24. (TT/1985) Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?
25. Em uma fábrica de cartões existem três máquinas. A primeira recebe um cartão (a, b) e retorna um cartão (a + 1, b + 1). A segunda recebe um cartão (2a, 2b) e retorna um cartão (a, b). A terceira recebe dois cartões (a, b) e (b, c) e retorna o cartão (a, c). Todas as máquinas
26. também retornam o(s) cartão(ões) dados. É possível fabricar um cartão (1, 1988) se temos inicialmente apenas um cartão (5, 19)?
27. Com a calculadora KPK-1991 podemos efetuar duas operações:

    (a) elevar um número ao quadrado;

    (b) obter de um número X de n dígitos (n > 3) o número A + B, onde A é o número formado pelos três últimos de X e B o número formado pelos (n − 3) dígitos de X.

    Podemos obter o número 703 a partir de 604 usando essa calculadora?

5. Semi-invariantes e Energia

Em alguns problemas envolvendo operações, nem sempre conseguiremos usar invariantes, mas podemos encontrar algo que não muda de comportamento. Elas são chamadas de semi-invariantes (ou energias), e geralmente seu valor numérico é fácil de ser descrito, apesar de ele variar (Pode crescer, decrescer ou oscilar periodicamente). Para explicar melhor, vejamos os exemplos abaixo:

Exemplo 6: No Parlamento da OBM-lândia, cada pessoa tem no máximo 3 inimigos lá. Mostre que as pessoas desse parlamento podem ser colocadas em duas salas, de modo que cada pessoa dentro de uma sala tem no máximo um inimigo dentro de sua própria sala. Lembre-se: se *A* é inimigo de *B*, então *B* é inimigo de *A*.

Solução: Inicialmente, colocamos as pessoas do parlamento nas duas salas de qualquer maneira. Se essa divisão satisfaz o problema, não há nada a fazer. Caso contrário, vamos definir Δ como sendo a soma das quantidades de inimigos que cada pessoa tem em sua própria sala. Vamos provar que Δ é uma semi-invariante, e que ela decresce ao fazermos a seguinte operação: Se há uma pessoa com pelo menos dois inimigos dentro da sua sala, quando trocarmos essa pessoa de sala, ela vai ter no máximo um inimigo dentro da nova sala. Com isso, Δ diminiu.

Como Δ é inteiro positivo, em algum momento Δ vai atingir seu valor mínimo. Neste momento, vai ser impossível trocar alguém de sala, e se isso é impossível, é porque todo mundo tem no máximo um inimigo na sua sala. Logo, encontramos a divisão de pessoas que queremos ■

Exemplo 7: 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número igual ou maior de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

Solução: Sejam a_1, a_2,..., a_{115} a quantidade de pessoas nos quartos 1, 2,..., 115 respectivamente em um dado momento. Defina a energia como:

$$I = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{115}^2$$

Você já deve suspeitar que o I é uma semi-invariante né? De fato, isso é verdade, e mais ainda: vamos provar que a cada passo I sempre cresce.

Digamos que uma pessoa sai de um quarto com *n* pessoas e vai para um quarto com *m* pessoas (com isso deduzimos que $m \geq n$). A variação de I é dada por:

$$\Delta I = I_{depois} - I_{antes} = ((m+1)^2 + (n-1)^2) - (m^2 + n^2)$$

Explicando a conta acima: precisamos apenas considerar os dois quartos com *m* e *n* pessoas, pois os outros quartos não foram afetados pelo movimento, e isso explica o termo $-(m^2 + n^2)$. Depois que a pessoa chega ao quarto com *m* pessoas, esse quarto fica com $(m+1)$ pessoas, e o outro quarto fica com $(n-1)$ pessoas. Isso explica o termo $((m+1)^2 + (n-1)^2)$. Fazendo a conta acima, vemos que:

$$\Delta I = 2(m - n + 1) > 0$$

Pois $m \geq n$. Assim, toda vez que uma pessoa muda de quarto o valor da energia I cresce. Porém, sabemos que o valor de I não pode crescer indefinidamente, pois o número de pessoas é finito. Ou seja, em um dado momento I não poderá mais crexcer, e isso é acontecerá quando nenhuma pessoa puder mudar de quarto. Logo, todas elas dever estar no mesmo quarto ■

Exercícios

28. $2n$ embaixadores foram convidados para um banquete. Todo embaixador tem no máximo $n-1$ inimigos. Prove que os embaixadores podem se sentar sobre uma mesa redonda, de modo que ninguém se sente ao lado de um inimigo seu.
29. (Leningrado) Existem n ≥ 2 números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números a e b e trocá-los por a + b/2 e b − a/2. Prove que após feito um movimento não podemos obter os números iniciais novamente.
30. (Ucrânia/2000) Existem inicialmente n números 1 escritos em um quadro. Em cada passo podemos apagar a e b e escrever o número $(\frac{ab\sqrt{2}}{a+b})$ no seu lugar. Após repetir essa operação $(n - 1)$ vezes, prove que o último número escrito não pode ser menor que $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
31. (São Petersburgo/1998) Um total de 119 anões vivem em uma aldeia com 120 pequenas casas. Uma casa é dita super-habitada se 15 anões ou mais vivem nela. Todo dia, os anões de uma casa super-habitada têm uma briga e se mudam para outras casas da aldeia. Algum dia, necessariamente, esse processo se encerrará?
32. (IMO/1986) Para cada vértice de um pentágono regular associamos um número inteiro, de modo que a soma dos cinco números é positiva. Se três vértices consecutivos estão associados aos números x, y, z, respectivamente, e se $y < 0$, então a seguinte operação é permitida: substituímos x, y, z por $x + y$, $-y$, $z + y$, respectivamente. Podemos fazer essa operação repetidas vezes, desde que pelo menos um dos cinco números seja negativo. Prove que em algum instante todos os cinco números serão todos maiores do que ou iguais a zero.

6. Referências

[1] Artur Engel – Problem Solving Strategies

[2] http://conesul2006.tripod.com/Material/comb.pdf

[3] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1