Semana Olímpica 2012
Inversão
Cícero Thiago
ETAPA/SP

1. Seja ABC um triângulo com incentro I. Prove que se uma circunferência é tangente a BC e a AI, em I, será também tangente ao círculo circunscrito ao triângulo ABC.

2. Seja ABC um triângulo com semi-perímetro $p$. Sejam D e E pontos sobre AB de maneira que CD = CE = $p$. Prove que a circunferência ex – inscrita de ABC, relativa ao vértice C, é tangente ao círculo circunscrito ao triângulo CDE.

3. Seja P um ponto no interior de um ângulo ABC. Determine a reta que passa por P, cortando AB em M e BC em N, tal que $\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}$ seja máximo.

4. (SL IMO/2003) Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ circunferências distintas tais que $\Gamma_1, \Gamma_3$ são externamente tangentes em P, e $\Gamma_2, \Gamma_4$ são externamente tangentes no mesmo ponto P. Se $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$; $\Gamma_2$ e $\Gamma_3$; $\Gamma_3$ e $\Gamma_4$; $\Gamma_4$ e $\Gamma_1$ intersectam – se em A, B, C, D, respectivamente; e todos esses pontos são diferentes de P. Prove que $\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$.

5. (Espanha/2005) Diremos que um triângulo é multiplicativo se o produto das medidas de dois de seus lados é igual à medida do terceiro lado. Seja ABC...XYZ um polígono regular de *n* lados com todos os lados medindo 1. As *n* – 3 diagonais que partem do vértice A dividem o triângulo ZAB em *n* – 2 triângulos menores. Prove que cada um destes triângulos é multiplicativo.

6. (Romênia/1997) Seja ABC um triângulo e um ponto D sobre BC. Duas circunferências são tangentes exteriormente em um ponto M sobre o segmento AD, são tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo ABC e são tangentes ao lado BC. Prove que AD é bissetriz do angulo A.

7. Seja ABC um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência K. Seja O um ponto que não pertence à circunferência K. Prove que existe um triângulo com lados OA, OB e OC.

8. (APMO/1991) Sejam $C_1$ e $C_2$ duas circunferências tangentes e $P$ um ponto sobre o eixo radical das duas circunferências, i.e. sobre a tangente comum às duas circunferências $C_1$ e $C_2$ que é perpendicular à reta que une os centros de $C_1$ e $C_2$. Construa, com régua e compasso, todas as circunferências $C$ que são tangentes a $C_1$ e $C_2$ e passam pelo ponto $P$.

9. (IMO/1999) Duas circunferências $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ estão contidas no interior de uma circunferência $\Gamma$ e são tangentes a $\Gamma$ em pontos distintos *M* e *N*, respectivamente. A circunferência $\Gamma_1$ passa pelo centro de $\Gamma_2$. A reta que passa pelos dois pontos de intersecÇão de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ intersecta $\Gamma$ em *A* e *B*. As retas *MA* e *MB* intersectam $\Gamma_1$ respectivamente em *C* e *D*.
Prove que *CD* é tangente a $\Gamma_2$.