

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OBM
15ª SEMANA OLÍMPICA
MACEIÓ – JANEIRO DE 2012

Saber Matemática pode me ajudar a ganhar na Mega-Sena ?
Prof. José Luiz

- **Probabilidades.**

A Teoria das Probabilidades é o ramo da matemática que pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos aleatórios, ou seja, experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes.

Uma das aplicações mais conhecidas popularmente é a dos jogos de Loteria, sendo a Mega-Sena a mais popular de todas. No final deste mini-curso calcularemos a probabilidade de acertar os seis números da Mega-Sena.

A definição mais simples de probabilidade se dá como o quociente do número de “casos favoráveis” pelo número de “casos possíveis”, de um experimento aleatório. O conjunto dos “casos possíveis” é chamado de Espaço Amostral (Ω) e o conjunto dos “casos favoráveis” é chamado de Evento (E). Observe que $E \subseteq \Omega$. Portanto, $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$, $0 \leq P(E) \leq 1$.

Um exemplo bem simples é o de calcular a probabilidade de ocorrer um número primo no lançamento de um dado cúbico. Temos,

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} ; E = \{2,3,5\}$$

$$\text{Logo, } P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\% .$$

Em problemas básicos, a maior dificuldade em calcular probabilidades está na contagem dos elementos dos conjuntos. Então, se sabes contar, não encontrará dificuldades em resolver os problemas abaixo, vários deles retirados do Banco de Questões 2011, da OBMEP.

1. Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?
2. Considere o conjunto $A = \{1; 2; 3; \dots; 2011\}$. Quantos subconjuntos de A existem de modo que a soma de seus elementos seja 2023060?
3. Tiago escreve todos os números de quatro algarismos não nulos distintos que possuem a mesma paridade. Qual a probabilidade de que, ao escolhermos um desses números, ele seja par?
4. Considere uma urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e algumas bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, outra bola dessa urna. Para quais quantidades de bolas azuis, a probabilidade das duas bolas retiradas terem mesma cor vale $\frac{1}{2}$?
5. Existem bolas azuis e bolas vermelhas em uma caixa. A probabilidade de sortear duas bolas de cores diferentes, ao retirar duas bolas ao acaso, é $\frac{1}{2}$. Prove que o número de bolas na caixa é um quadrado perfeito.

6. Dez pontos são dados no plano e não existem três colineares. Quatro segmentos distintos ligando pares destes pontos são escolhidos ao acaso, mas todos com a mesma probabilidade. Qual é a probabilidade de três dos segmentos escolhidos formarem um triângulo?

7. Lançam-se dois dados não-tendenciosos. Qual a probabilidade da soma dos pontos ser igual a 7 ?

8. 24 times são divididos em dois grupos de 12 times cada. Qual é a probabilidade de dois desses times ficarem no mesmo grupo?

9. Um polígono regular de $2n + 1$ lados está inscrito em um círculo. Escolhem-se três dos seus vértices, formando um triângulo. Determine a probabilidade do centro do círculo ser interior ao triângulo.

10. Doze pessoas são divididas em três grupos de 4. Qual é a probabilidade de duas determinadas dessas pessoas ficarem no mesmo grupo?

• **Estudando o jogo da Mega-Sena.**

Na Mega-Sena você escolhe de 6 a 15 números dentre os 60 do volante. Quanto mais números você escolher, maior é a chance de ganhar e maior é o preço da aposta. Veja a tabela abaixo:

Qtde de escolhas	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valor R\$	2,00	14,00	56,00	168,00	420,00					
Probabilidade Mega-Sena	$\frac{1}{50.063.860}$									
Probabilidade Quina	$\frac{1}{154.518}$									
Probabilidade Quadra	$\frac{1}{2.332}$									

Responda:

- Os valores cobrados para jogos com 7, 8, 9 ou 10 números escolhidos são justos ?
- Preencha a tabela com os valores (justos) para jogos com 11, 12, 13, 14 e 15 marcações.
- Calcule as probabilidades em branco na tabela.
(Pense em uma fórmula para calcular essas probabilidades em função da quantidade de números escolhidos).

• **Vale a pena consultar.**

- MORGADO, A. ; CARALHO, J. ; CARVALHO, P. ; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- OLIVEIRA, K. ; FERNANDEZ, A. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Coleção Olimpíadas de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.