38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Primeira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)
Sexta-feira, 17 de junho de 2016.

Caro(a) aluno(a):

- A duração da prova é de 3 horas.
- Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Cada problema vale 1 ponto.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (a) professor(a) aplicador(a).
- Lembre-se de que, ao participar da OBM, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

Boa Prova!

---

1) Lena quer completar as casas do tabuleiro 3×3 ao lado, usando as mesmas letras já escritas, de modo que casas vizinhas (casas com um lado comum) não tenham a mesma letra. Que letra poderá ser escrita na casa cinzenta?

O	B	
M		

A) somente O B) somente B C) somente M D) somente O ou M E) qualquer uma

---

2) Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?

A) 404º B) 405º C) 407º D) 1007º E) 1008º

---

3) A área de um quadrado é um número inteiro de metros quadrados e é igual à área de um retângulo de lados inteiros cujo perímetro é 58 metros. Qual é a medida do lado do quadrado em metros?
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

---

4) Considere uma pirâmide P cuja base é um polígono regular de 2016 lados. Apesar de sua base ser um polígono regular, a pirâmide P não é regular, pois a projeção do seu vértice sobre o plano da base não coincide com o centro da base. No mínimo quantas faces laterais não congruentes duas a duas P tem?

A) 672 B) 1008 C) 1009 D) 1010 E) 2016

---

5) Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que a pessoa imediatamente à sua frente é mentirosa. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?
A) nenhuma B) 1007 C) 1008 D) 2015 E) todas

6) Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

---

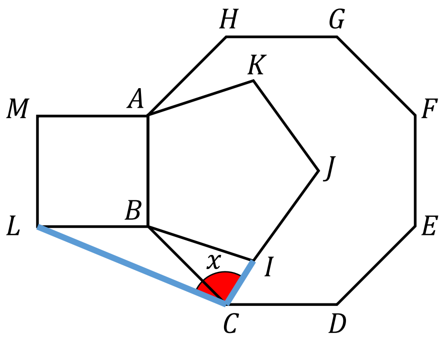
7) Qual das equações abaixo resolve o problema a seguir?

"Uma quantidade x de amigos resolveu fazer uma viagem juntos, dividindo igualmente suas despesas, no total de 6000 reais. Entretanto, na última hora, três dos amigos desistiram e cada um dos que foram viajar teve que arcar com uma despesa extra de 100 reais. Quantos amigos eram?"

A) $x^2 - 12x = 0$ B) $x^2 - 3x - 180 = 0$ C) $x^2 = 144$ D) $x^2 - 5x + 6 = 0$ E) $x^2 - 100x + 6000 = 0$

---

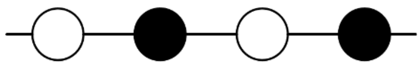
8) Na figura a seguir sabe-se que $ABCDEFGH$ é um octógono regular, $ABIJK$ é um pentágono regular e $ABLM$ é um quadrado. Determine a medida em graus do ângulo $\angle LCI$ representado na figura pela letra x.



A) 81° B) 90° C) 92° D) 99° E) 102°

---

9) Um colar é constituído por dois tipos de pérolas: as brancas e as pretas. Ele está aberto e disposto em uma mesa formando uma linha de pérolas consecutivas. Duas sequências de três pérolas consecutivas são equivalentes se elas possuem exatamente as mesmas pérolas dispostas na mesma ordem ou em ordem inversa. Por exemplo, se P e B indicam as cores das pérolas pretas e brancas, respectivamente, a sequência PBBP contém duas sequências de três pérolas equivalentes: as primeiras três, com a combinação PBB; e as últimas três, com a combinação BBP. Qual a quantidade mínima de pérolas que o colar deve possuir para termos certeza de que existem duas sequências equivalentes independentemente de como elas estejam distribuídas?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Texto para os problemas 10 e 11.

Em uma circunferência de raio 1 estão inscritos um hexágono regular $ABCDEF$ e um quadrado $AXDY$. O segmento BF intersecta os lados AX e AY do quadrado nos pontos R e S, respectivamente. A reta BD intersecta as retas AX e AY em T e U, respectivamente.

10) A distância RS é

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

---

11) A distância TU é

A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) 4

---

12) Dado um real x, sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x e sua parte fracionária é dada por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Quantas soluções tem a equação $\lfloor x \rfloor - 2016\{x\} = 38$?

A) 11 B) 36 C) 1008 D) 2016 E) 2017

---

13) De quantas maneiras podemos escolher n casas de um tabuleiro $n \times n$, $n > 3$, sem escolher duas casas na mesma linha ou na mesma coluna, sabendo que os quatro cantos do tabuleiro não podem ser escolhidos?

A) $(n-2)(n-3)(n-2)!$ B) $(n-4)(n-1)!$ C) $(n^2-5n+2)(n-2)!$ D) $(n-2)(n-1)!$
E) $(n-2)(n-2)!$

---

14) Na igualdade $\frac{D\times O\times Z\times E}{D\times O\times I\times S} = S \times E \times I \times S$, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto $S \times E \times I \times S$ pode ter?
A) 12 B) 18 C) 22 D) 28 E) 36

---

15) Humberto joga um dado honesto e obtém x_1 pontos; Doisberto joga dois dados honestos e tira a média aritmética x_2 dos resultados; Tresberto joga três dados honestos e tira a média aritmética x_3 dos resultados. Todos os dados têm faces numeradas de 1 a 6. Sendo p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de obter $x_1 \geq 5$, $x_2 \geq 5$ e $x_3 \geq 5$, respectivamente, então

A) $p_1 < p_2 < p_3$ B) $p_1 < p_3 < p_2$ C) $p_2 < p_1 < p_3$
D) $p_2 < p_3 < p_1$ E) $p_3 < p_2 < p_1$

---

16) Em um jogo de videogame, um personagem, o OBMario, se desloca em uma tela de medidas 3 e 4; quando ele chega no limite da tela, ele reaparece no lado oposto (se sai pela esquerda, volta à direita, à mesma altura, e vice-versa; se sai por cima, volta por baixo, à mesma distância do lado esquerdo da tela, e vice-versa). Chamamos o menor trajeto de OBMario entre dois pontos de *distância de videogame*. Qual é a maior distância de videogame possível entre dois pontos da tela?

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 4 E) 5

---

17) A quantidade de triplas ordenadas (a, b, c) de reais tais que
$$a = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \qquad b = \frac{c}{a} + \frac{a}{c}, \qquad c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$
é

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

---

18) O ano de 2016 é sabadoso, pois há cinco meses com cinco sábados. Qual será o próximo ano sabadoso?
A) 2017 B) 2019 C) 2020 D) 2021 E) 2022

---

19) O conjunto X está contido em $\{1,2,3,\ldots,2016\}$ e tem a seguinte propriedade: para todos $x, y \in X$ com $x < y$, $y + 1$ é múltiplo de x. Qual é a quantidade máxima de elementos que X pode ter?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

---

20) Juca gosta de brincar com um número e a soma dos seus dígitos. Ele decidiu chamar um número inteiro s de *sagaz* se existe algum número n tal que s é a diferença entre n e a soma dos dígitos de n. Por exemplo, 18 é sagaz, pois ele é igual a $28 - (2 + 8)$. Existem quantos números sagazes maiores que 1 e menores que 1000?

A) 0 B) 100 C) 111 D) 250 E) 998

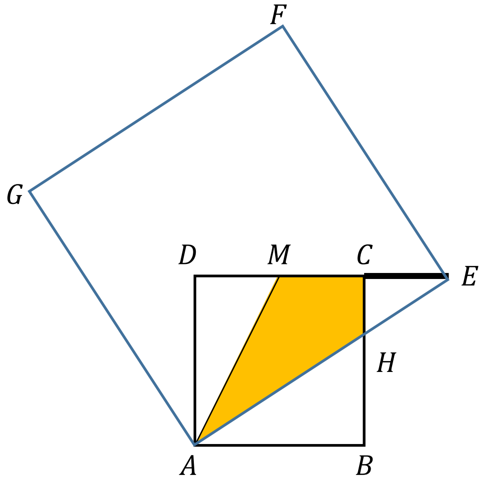
---

21) Pedroso tem pilhas com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 11 pedras (sim, ele não tem uma pilha com 10 pedras). Ele pode juntar duas pilhas de pedras. Quantas vezes, no mínimo, ele deve fazer essa operação para ter pilhas com as mesmas quantidades de pedras?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

---

22) Na figura abaixo, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.



A) $\frac{5}{39}$ B) $\frac{5}{27}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

---

23) Uma função f dos inteiros positivos nos inteiros positivos é tal que se m é múltiplo de n e $m > n$ então $f(m) > f(n)$. O menor valor possível de $f(2016)$ é

A) 2 B) 8 C) 9 D) 12 E) 2016

---

24) A soma de 2016 números inteiros positivos é maior ou igual ao produto dos mesmos 2016 números inteiros positivos. Pelo menos quantos desses números são iguais a 1?

A) 2004 B) 2005 C) 2006 D) 2007 E) 2008

---

25) No quadrilátero convexo $ABCD$, $m(B\hat{A}D) = m(B\hat{C}D) = 60°$ e $BC \perp BD$. A razão entre a distância de C ao circuncentro de ABD e a medida do segmento de reta CD é

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$