Prof. Bruno Holanda - Semana Olímpica 2011 - **Nível 3**

Combinatória & Outros Tópicos

1.1 Esquentando...

1. (Torneio das Cidades 1989) Temos 101 retângulos distintos de papel de lados inteiros não maiores que 100 . Prove que podemos escolher três deles A, B e C de modo que A cobre B e B cobre C.

2. (Torneio das Cidades 1987)
(a) $3n$ estrelas são colocadas em um tabuleiro $2n \times 2n$. Prove que podemos eliminar n linhas e n colunas de modo que todas as estrelas sejam eliminadas.
(b) Prove que, com $3n + 1$ estrelas, isso não é mais possível.

3. (Leningrado 1989) Dado um número natural k maior que 1, prove que é impossível colocar os números $1, 2, ..., k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que todas as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam potências de 2.

4. (Romênia 1996) Seja $n \geq 3$ um inteiro, e seja
$$X \subseteq S = \{1, 2, 3, ..., n^3\}$$
um conjunto de $3n^2$ elementos. Prove que existem nove elementos a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ em X tais que o sistema
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$
tenha solução inteira.

1.2 Combinatória Geométrica

1. (Proposto IMO 1989) Temos um conjunto finito de segmentos no plano, de medida total 1. Prove que existe uma reta ℓ tal que a soma das medidas das projeções destes segmentos à reta ℓ é menor que $2/\pi$.
2. (Torneio das Cidades 1980) Um conjunto finito de egmentos, de comprimento total 18, estão no interior de um quadrado unitário (assuma que o interior de um quadrado contém sua borda e que os segmentos contém suas extremidades). Os segmentos são paralelos aos lados do quadrado e podem se cruzar. Prove que dentre as regiões em que o quadrado é dividido, pelo menos uma tem área não menor que $0,01$.
3. (Turquia 1999) Prove que o plano não pode ser coberto por um número finito de regiões internas de parábolas.
4. (São Petersburgo 2000) Em um tabuleiro infinito são colocados 111 L-triminós de modo que qualquer quadrado 2×2 que cubra um deles seja coberto totalmente por esses L-triminós. Prove que podemos retirar entre 1 e 110 (inclusive) destas peças e a propriedade continuará válida.
5. (Banco IMO 2003) Seja $n \geq 5$ um inteiro positivo. Determine o maior inteiro $k = k(n)$ para o qual existe um polígono com n vértices (convexo ou não, sem auto-interseções) que possui k ângulos internos de $90°$.
6. (Banco IMO 1967) O quadrado $ABCD$ é decomposto em n triângulos acutângulos. Ache o menor valor possível de n.
7. *(AMM - Paul Monsky 1970) Um quadrado é particionado em k triângulos de mesma área. Prove que k é par.

1.3 Outros Tópicos

1. (China 1993) Determine todas as funções $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ tais que $\forall x \geq 1$,
$$f(x) \leq 2(x+1),$$
$$f(x+1) = \frac{1}{x}((f(x))^2 - 1).$$
2. (Romênia 2006) Sejam x_i números reais. Prove que
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |x_i + x_j| \geq n \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
3. (China 1986) Sejam $z_1, z_2, ..., z_n$ números complexos tais que
$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 1.$$
Mostre que existe um subconjunto $S \subseteq \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ tal que
$$\left| \sum_{z \in S} z \right| \geq \frac{1}{4}.$$

4. (Bulgária 1997) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$. Sejam H e O o ortocentro e o circuncentro do triângulo ABC. Prove que H, O e D são colineares.

5. Seja ABC um triângulo com incentro I. Fixe uma reta ℓ tangente ao incírculo de ABC. Seja A', B', C' pontos sobre ℓ tais que
$$\angle AIA' = \angle BIB' = \angle CIC' = \pi/2$$
Mostre que AA', BB' e CC' são concorrentes.

6. (São Petersburgo 2000) As mediatrizes dos lados AB e BC de um triângulo não equilátero ABC encontra as retas BC e AB nos pontos A_1 e C_1, respectivamente. As bissetrizes dos ângulos A_1AC e C_1CA se encontram em B'. Defina C' e A' de modo análogo. Prove que A', B', C' estão sobre uma reta que passa pelo circuncentro do triângulo ABC.

7. (Rússia 2008) No triângulo escaleno ABC as alturas AA_1 e CC_1 intersectam-se em H. O é o circuncentro, B_0 é o ponto médio do lado AC. $P = AC \cap BO$ e $Q = BH \cap A_1C_1$. Prove que $HB_0 \parallel PQ$.

8. (São Petersurgo 2000) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com $AD \parallel BC$. Um círculo arbitrário é tangente a AB e AC e intersecta BC nos pontos M e N. Sejam X e Y os pontos de interseção (próximos de D) as retas DM e DN com o incírculo do triângulo BCD. Prove que $XY \parallel AD$.

9. (São Petersurgo 2000) Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. E $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos. Mostre que
$$\frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_2+a_3}{2}\cdots\frac{a_n+a_1}{2} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{2\sqrt{2}}\cdots\frac{a_n+a_1+a_2}{2\sqrt{2}}$$

10. Sobre uma mesa há oito caixas. Cada uma das oito caixas contém seis bolas. Cada bola é colorida com uma das n cores disponíveis, tal que não existam duas bolas da mesma cor na mesma caixa e duas cores não ocorrem juntas em mais de uma caixa. Determine, com prova o menor inteiro n para que isso seja possível.

11. (IMO 1998) Em uma competição, existem a competidores e b juízes, onde $b \geq 3$ e é um inteiro ímpar. Cada juíz aprova ou reprova o competidor. Suponha que k é o número tal que, para quaisquer dois juízes, sua escolha coincida para no máximo k competidores. Prove que
$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$