XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Calcule $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)\cos x} dx.$

PROBLEMA 2:
Qual a maior área possível para a sombra de um cubo de aresta 1?

(Obs.: supomos que o sol está a pino, isto é, a sombra é uma projeção ortogonal; o cubo pode estar em qualquer posição).

PROBLEMA 3:
Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos e $n = n_1 n_2$.
Considere a matriz real simétrica $n \times n$, $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, tal que para todo i,

$a_{i,i} = 4,$

$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ para $1 \le i \le n-1$ tal que $(i+1)$ não é múltiplo de n_1,

$a_{i,i+n_1} = a_{i+n_1,i} = -1,$

e as demais entradas $a_{i,j}$ são iguais a 0.

Prove que A é invertível e todas as entradas de A^{-1} são positivas.

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase – Nível Universitário

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Definimos os polinômios $\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-j+1)}{j!}$ para todo j natural, com $\binom{x}{0} = 1$.

a) Prove que todo polinômio não identicamente nulo pode ser escrito como uma combinação linear desses $\binom{x}{j}$ de forma única;

b) Seja $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ o coeficiente de $\binom{x}{k}$ no desenvolvimento de x^n (como no item *a*)). Calcule

$$\frac{\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle}.$$

PROBLEMA 5:

Se F é um subconjunto finito de $\mathbb{R}^3$, denotamos por $V_r(F)$ a vizinhança de raio r de F (i.e., a união das bolas abertas de raio r com centros pertencentes a F).

Prove que, se $0 < r < R$, $\text{vol}(V_R(F)) \leq (R/r)^3 . \text{vol}(V_r(F))$.

PROBLEMA 6:

Prove que se $10^{2^n} + 8.10^n + 1$ tem um fator primo da forma $60k + 7$ então n e k são pares.