XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível 1

Paridade, Jogos e Invariantes

Samuel Feitosa

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

Semana Olímpica 2016
Paridade, Jogos e Invariantes
Nível 1

Samuel Feitosa

Paridade como Invariante

Vamos começar com um problema bastante famoso que já foi utilizado até em entrevistas para grandes empresas de computação.

Exercício 1. 100 pessoas são postas em uma fila e cada uma delas recebe um chapéu preto ou branco. Cada pessoa só consegue ver os chapéus das pessoas que estão a sua frente. É pedido que cada uma delas tente adivinhar a cor do seu chapéu. Qual o máximo número de acertos que se pode garantir, dado que as pessoas podem combinar uma estratégia antes de recebê-los.

Exercício 2. (Olimpíada de Maio 1999) Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Definiremos uma peça chamada de **príncipe** (que não existe no jogo de xadrez) como uma peça que só pode andar na horizontal e vertical, uma casa por vez. Um jeito comum de fazer notações em um tabuleiro de xadrez é nomear as colunas da esquerda para a direita de **a** a **h** e as linhas de baixo pra cima de **1** a **8** tomando o referencial da pessoa que joga com casas brancas.

Exercício 3. Sobre um tabuleiro de xadrez, um príncipe começa do quadrado $a1$ e retorna após fazer alguns movimentos. Mostre que o príncipe fez um número par de movimentos.

Exercício 4. Pode um príncipe começar do quadrado $a1$ de um tabuleiro de xadrez, ir até o quadrado $h8$, visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez?

Exercício 5. Uma linha poligonal fechada é composta por 11 segmentos. Pode uma reta (não contendo um vértice da linha poligonal) intersectar cada um desses segmentos?

Exercício 6. Três bolas de gude, A , B e C, estão no chão. Um movimento permitido é passar uma bola entre as outras duas . É possível, após 25 movimentos, que todas as bolas estejam nas suas posições originais?
Dica: Que horas são? (Sentidos horário e anti-horário...)

Exercício 7. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Exercício 8. Katia e seus amigos estão em um círculo. Sabemos que ambos os vizinhos de cada criança são do mesmo sexo. Determine o número de garotas sabendo que existem 5 garotos no círculo.

Dica: Comece a analisar por um vizinho da Katia.

Exercício 9. (Rússia 1970) O rei Luis estava desconfiado de alguns de seus cortesãos. Ele fez uma lista completa de cada um dos seus cortesãos e disse a cada um deles para espionar um outro cortesão. O primeiro da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o segundo da lista, o segundo da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o terceiro da lista, e assim sucessivamente, o penúltimo foi espionar o cortesão que estava espionando o último e o último foi espionar o cortesão que estava espionando o primeiro. Prove que o rei Luis tinha um número ímpar de cortesãos.

Exercício 10. Um cubo $1 \times 1 \times 1$ está posicionado em um plano quadriculado de modo que uma de suas faces coincide com um dos quadradinhos do plano. Em cada movimento podemos "tombar" o cubo por uma de suas arestas, fazendo coincidir uma face, que tinha essa aresta, com um dos quadradinhos do plano. É possível fazer o cubo voltar a sua posição inicial após 2005 movimentos?

Dica: Alguém aí joga xadrez?

Paridade e Contagens

Nesta seção, abordaremos duas ideias muito simples:

1. Se contamos os elementos de um conjunto de duas maneiras diferentes, os valores obtidos devem ter a mesma paridade (Por que são iguais!)
2. Se os elementos de um conjunto podem ser pareados então o conjunto tem uma quantidade par de elementos.

Exercício 11. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Você deve ter ficado com uma pulga atrás da orelha. Será que cada casa estar ligada a exatamente 7 outras foi realmente crucial? É possível revolvermos o problema anterior com um enunciado mais geral:

Exercício 12. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Exercício 13. (Olimpíada de Maio 2000) O conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ pode ser dividido em dois subconjuntos $A = \{1, 4\}$ e $B = \{3, 2\}$ sem elementos comuns e tais que a soma dos elementos de A seja igual à soma dos elementos de B. Essa divisão é impossível para o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e também para o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine todos os valores de n para os quais o conjunto dos primeiros n números naturais pode ser dividido em dois subconjuntos sem elementos comuns tais que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma.

Exercício 14. Podemos desenhar uma linha poligonal fechada feita por 9 segmentos de reta, cada um deles intersectando ıexatamente outro segmento?

Os próximos dois problemas tratam de dominós. Um dominó consiste de um tabuleiro 1×2 com pontos em cada casinha. A quantidade de pontos varia de 0 até 6. Então, o número total de dominós distintos é 28.

Exercício 15. Todos os dominós são arranjados em uma cadeia de duas pontas (a quantidade de pontos na extremidade de dois dominós consecutivos é a mesma). Se em uma ponta existe o número 5, qual é o número da outra ponta?

Exercício 16. Em um conjunto de dominós, descartarmos todos aqueles que possuem pelo menos uma casinha vazia. É possível arranjarmos todos os restantes em uma cadeia?

Exercício 17. (Eslovênia 1992) Prove que para quaisquer inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o número:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_1|$$

é par.

Observação: $|x - y|$ é chamado de valor absoluto da diferença entre x e y e denota o máximo entre $x - y$ e $y - x$. Na reta real, ele representa a distância entre os números x e y.

Miscelânia

Exercício 18. Podemos trocar uma nota de 25 reais usando dez notas que podem assumir os valores $1, 3, 5$?

Exercício 19. Peter comprou um caderno com 96 folhas, e numerou com os números de 1 até 192. Victor rasgou 25 folhas consecutivas do caderno, e adicionou os 25 números. Victor pode ter obtido o número 1990 como resultado da soma?

Exercício 20. Prove que a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$ não tem admite soluções com todos os números sendo ímpares.

Exercício 21. O produto de 22 inteiros é igual a 1. Mostre que sua soma não pode ser zero.

Dica: Compare as quantidades de números positivos e negativos.

Exercício 22. Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 1991 movimentos?

Exercício 23. Os números de 1 até 10 são escritos em uma linha. Podemos colocar os sinais $+$ e $-$ entre eles de modo que o resultado da expressão resultante seja 0?

Exercício 24. Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda $1cm$, no segundo $2cm$, e assim sucessivamente. Ele pode pular para a esquerda ou para a direita. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar ao ponto em que começou.
Dica: Perceba que você pode associar aos pulos do gafanhoto um número com sinal ($+$ se o pulo é para a esquerda e $-$ se é para a direita). Agora use o problema anterior.

Exercício 25. Os números $1, 2, \ldots, 1984, 1985$ são escritos em um tabuleiro. A operação permitida é apagar dois números e colocar sua diferença positiva. Após algumas operações, resta apenas um único número no tabuleiro. Pode este número ser 0?
Dica: Ma ôêê...(Sotaque Silvio Santos) Quem sabe qual é a invariantêêê?

Exercício 26. Pode um tabuleiro 8×8 ser coberto por com dominós 1×2 de modo que somente os quadrados $a1$ e $h8$ não sejam cobertos?

Exercício 27. 45 pontos são escolhidos sobre a reta AB, todos fora do segmento de reta $\overline{AB}$. Prove que a soma das distâncias desses pontos ao ponto A não pode ser igual a soma das distâncas ao ponto B.

Exercício 28. Um número de 17 dígitos é somado com o seu reverso (um número com os mesmo dígitos mas escritos na ordem inversa). Mostre que sua soma contém pelo menos um dígito par.

Exercício 29. Existem 100 soldados em uma quartel, toda noite , três deles ficam de guarda. Após um certo período de tempo, é possível que cada soldado tenha ficado da guarda exatamente uma vez com cada outro soldado?

Exercício 30. 25 garotos e 25 garotas estão sentados ao redor de uma mesa. Prove que é sempre possível encontrar uma pessoa em que ambos os seus vizinhos são garotas.

Exercício 31. (Ucrânia 1997) Um tabuleiro é colorido de branco e preto da maneira usual, e cada casa contém um inteiro. Sabemos que a soma dos números em cada coluna e a soma dos números em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casa pretas é par.

Exercício 32. Considere um tabuleiro 1998×2002 pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1's em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1's escritos nas casas brancas é par.
Dica: Tente imitar a solução anterior.

Exercício 33. (Austrália 2007) Em cada casa de um tabuleiro 2007×2007 escrevemos um número inteiro ímpar. Sejam Z_i a soma dos números na i-ésima linha e S_j a soma dos números na j-ésima coluna, para $1 \leq i, j \leq 2007$. Além disso, sejam $A = Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_{2007}$ e $B = S_1 \cdot S_2 \cdots S_{2007}$. Mostre que $A + B$ não pode ser igual a zero.

Exercício 34. (China 1986) É possível arranjar os números $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, 1986, 1986$ em fila de modo que entre quaisquer dois $i's$ hajam $(i-1)$ números?

Exercício 35. É possível arranjar os números de 1 até 9 em uma sequência, de modo que exista uma quantidade de números ímpares entre 1 e 2, entre 2 e 3 , . . . , e entre 8 e 9?

Exercício 36. (Rússia 1984) O número de todos os inteiros positivos de 64 digitos sem zeros em sua representação e que são divisíveis por 101 é par ou ímpar?

Exercício 37. (Putnam 1997) Seja B_n a quantidade de $n - uplas$ ordenadas de inteiros positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Determine se B_{10} é par ou ímpar.

Exercício 38. Prove que numa festa com $2n$ pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

Exercício 39. Alex desenhou uma coleção de K retas no plano em posição geral (quaisquer duas retas se intersectam em um ponto e quaisquer três definem um triângulo não degenerado). Para quais valores de K é sempre possível (não importa como as retas são desenhadas) colocar um elemento do conjunto $\{1, 2, \ldots, K-1\}$ nos pontos de interseção das retas de modo que em toda reta não existam dois números iguais.

Exercício 40. (Russia) Em cada planeta de um sistema solar existe um astrônomo observando o planeta mais próximo. As distâncias entre os planetas são distintas duas a duas. Demonstre que se a quantidade de planetas é ímpar, então existe pelo menos um planeta que não é observado.
Dica: Procure as cadeias de planetas que um olha para o outro que olha para o outro com mais de 2 planetas.

Invariantes

Exercício 41. (Torneio das Cidades 1985) Na ilha de Camelot, vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Exercício 42. Três máquinas I, R, S imprimem pares de inteiros positivos em tickets. Para a entrada (x, y), as máquinas I, R, S imprimem respectivamente $(x - y, y), (x + y, y), (y, x)$. Iniciando com o par $(1, 2)$ podemos alcançar

a) (819, 357)?

b) (19, 79)?

Exercício 43. Existe um peão no quadradinho $(1,1)$ no canto de um tabuleiro infinito de coordenadas (x, y) com x e y positivos. Um movimento permitido é dobrar uma coordenada ou subtrair a menor coordenada da maior. É possível chegarmos no ponto $(2013, 39)$?

Exercício 44. Cada termo da sequência $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ começando com o sétimo é o resto na divisão por 10 da soma dos últimos 6 termos. Prove que a sequência $\ldots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ nunca pode ocorrer.

Exercício 45. Mostre que um tabuleiro 10×10 não pode ser coberto por 25 T-tetraminós.

Exercício 46. Mostre que um tabuleiro 8×8 não pode ser coberto por 15 T-tetraminós e um tetraminó quadrado.

Exercício 47. Um tabuleiro $a \times b$ é coberto por peças de tamanho $1 \times n$. Mostre que n divide a ou n divide b.

Exercício 48. É dado um decágono regular com todas as suas diagonais traçadas. Em cada vértice e em cada ponto onde as diagonais se intersectam (considerando apenas pontos de interseção interiores) é colocado o número $'' + 1''$. Podemos em qualquer momento mudar os sinais de todos os números escritos em uma diagonal ou em um lado. É possível após um certo número de tais operações termos trocado todos os sinais para $-1''$?

Jogos

Exercício 49. O jogo começa com o número 1000. Na sua vez, cada jogador pode subtrair do número atual qualquer número que seja uma potência de 2 menor ou igual ao número atual. O jogador que obtiver o número 0 vence. Quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 50. O jogo começa com o número 1000. Na sua vez, cada jogador pode subtrair do número atual qualquer número do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. O jogador que obtiver o número 0 vence. Se existem dois jogadores, quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 51. O número 2 está escrito em o quadro negro no início de um jogo. Dois jogadores, alternadamente, podem trocar o número atual N do quadro pelo número $N + d$ onde d é um divisor positivo de N menor que N. O jogador que escrever um número maior que 19891989 perde o jogo. Qual dos dois jogadores pode sempre garantir a vitória?

Exercício 52. (Cone Sul) Estão escritos em um quadro negro os 100 números: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/100$. A cada segundo, eliminamos dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e incluímos, no conjunto, o número $a + b + ab$ obtendo assim um conjunto con um elemento menos. Depois de 99 destas operações, ficaremos apenas com um número. Quais os possíveis que ele pode tomar?

Exercício 53. (OBM 1998) Começando com o conjunto $\{3, 4, 12\}$, é permitido apagar dois números a e b e escrever em seus lugares $0,6a - 0,8b$ e $0,6b + 0,8a$. É possível chegar ao conjunto $\{4, 6, 12\}$?

Exercício 54. Começamos com uma pilha contendo n palitos. Dois jogadores A e B jogam alternadamente removendo palitos da pilha. Em seu primeiro movimento, A remove qualquer número s de modo que $0 < s < n$. Daí em diante, um jogador pode remover qualquer número inteiro positivo de palitos da pilha que seja um divisor do número retirado no movimento precedente. O vencedor é aquele que fizer o último movimento. Se $n = 1000$, quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 55. (OCM) No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:
– Marcondes: estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior;
Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversação. – Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
– Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
– Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
– Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
– Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
– Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
– Francisco: agora eu sei o número que o Fernando recebeu;
– Fernando: agora eu tamb em sei o número que Francisco recebeu;
Quais os números recebidos por cada um deles?

Exercício 56. (O jogo de Wythoff) Dois jogadores jogam alternadamente removendo pedras de duas pilhas sobre uma mesa. Na sua vez, cada jogador pode remover qualquer quantidade de pedras de uma pilha ou igual número de pedras de ambas as pilhas. O ganhador é aquele que retirar a última pedra. Determine todas posições perdedoras.

Exercício 57. (Jogo do NIM) Existem três montes com 3, 5 e 7 pedras. Na sua vez, cada jogador pode remover quantas pedras quiser de um dos montes. Perde o jogador que remover a última pedra. Quem sempre pode garantir a vitória?

Respostas e Soluções.

1. Facilmente consegue-se 50 acertos. Podemos dividir as pessoas em pares: $(100, 99), (98, 97), ...(2, 1)$ e assim o maior número de cada par fala a cor da pessoa da frente, que apenas precisa repeti-lo, para garantir 1 acerto por par. De uma forma um pouco mais elaborada, se garante 66 acertos. Separando em trios: $(100, 99, 98), ...(4, 3, 2)$. O maior número de cada trio pode falar BRANCO caso os dois da sua frente tenham a mesma cor e PRETO, caso as cores sejam distintas. Assim, após o maior número falar, o número do meio pode acertar sua cor e em seguida, o primeiro do trio pode acertar a dele. Curiosamente esse número pode chegar a 99 acertos utilizando esse poderoso argumento que é a paridade. Notemos que ninguem sabe a cor do último da fila. Então não importa a estratégia de ordem das pessoas, nenhuma informação pode ser obtida para esse chapéu. O que não ocorre com os 99 chapéus restantes. Note ainda que a diferença de conhecimentos entre uma pessoa e a pessoa que se encontra atrás dela é apenas o seu chapeu. Então, basta seguir a estratégia: As cores serão faladas das pessoas de trás para as da frente. E a última pessoa vai falar BRANCO caso a quantidade de chapéus brancos a sua frente seja par e PRETO, caso contrário. Como a 99^a pessoa sabe a paridade da quantidade de chapéus brancos a sua frente, ela acertará o seu chapéu. A 98^a computando ambas as informações pode acertar o dela, e assim sucessivamente.

2. Uma maneira muito utilizada para atacar problemas onde é dado uma condição inicial e um conjunto de operações para manipulá-la é tentar procurar o que não muda, independente dos movimentos que utilizamos. Note que se uma rã vai de um degrau par para um ímpar (muda de paridade), a outra rã que se movimenta com ela também pulará um número ímpar de degraus, mudando também de paridade. Caso a primeira não mude, a sua parceira de movimento também permanecerá num degrau de mesma paridade. UMA INVARIANTE: Paridade da quantidade de rãs em degraus de número par (Comprove testando os movimentos possíveis). Como na posição inicial há 5 rãs nos degraus de posição par e na posição final há ou dez ou zero rãs nos degraus de posição par. A posição final NÃO pode ser obtida da posição inicial, apenas fazendo essas operações permitidas.

3. Veja que em cada movimento, o príncipe muda para uma casa de cor oposta. Como a casa $a1$ é preta, após um número **ímpar** de movimentos o príncipe estará numa casa da cor branca. Para ele ter retornado até a casa preta do início, ele deverá ter feito um número **par** de movimentos.

4. A resposta é não. Em cada movimento, o príncipe pula de um quadrado de uma cor para um quadrado da cor oposta. Como o príncipe tem que fazer 63 movimentos, o último movimento irá deixá-lo em uma casa da cor oposta a cor de $a1$. Entretanto, $a1$ e $h8$ tem a mesma cor.

5. A resposta é não. Numeremos os vértices da linha poligonal com os números de 1 até 11. Se tal reta existisse, os vértices ímpares ficariam em um dos semiplanos determinados por ela e o vértices pares no outro. Entretanto, o segmento que une os vértices 1 e 11 em um destes semiplanos e não poderia ser cortado pela reta. Este absurdo mostra que tal reta não existe.

6. Vamos denotar por A, B e C as três bolas de gude. A leitura da palavra ABC após alguns movimentos será feita no sentido horário ou no sentido anti-horário. Perceba que se em um dado momento a leitura foi feita no sentido horário, logo após um movimento, a leitura na nova configuração será feita no sentido anti-horário e vice-versa. Portanto, após uma quantidade ímpar de movimentos, a configuração das bolas produzirá uma leitura da palavra ABC que é oposta à configuração original. Como 25 é ímpar, é impossível que a configuração final coincida com a inicial, pois terão orientações diferentes.

7. Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Bem, facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada duas vezes. Logo o número obtido teria que ser par.

9. Seja n o número de cortesãos da lista e suponha que n é par. Coloque-os sentados ao redor de uma mesa circular de modo que cada um esteja espionando o seu vizinho da esquerda. O cortesão 1 espia o cortesão X que espia o cortesão 2, o cortezão 2 espia o cortesão Z que espia o cortesão 3, e assim sucessivamente até que o cortesão $\frac{n}{2}$ espia o cortesão Y que espia o cortesão $\frac{n}{2} + 1$. Como os números $1, 2, 3, \ldots, n$ devem se alternar sobre o círculo, concluímos que o cortesão $\frac{n}{2} + 1$ é igual ao cortesão 1, ou seja, $n = 0$. Esse absurdo mostra que n é ímpar.

11. Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Bem, facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada duas vezes. Logo o número obtido teria que ser par.

12. Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

13. Como a soma dos elementos de A deve ser igual a soma dos elementos de B, a soma dos nuémros do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ deve ser o dobro da soma dos elementos de A, ou seja, deve ser um número par. Você já deve saber que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Você não sabia disso? Não fique aí parado! Tente descobrir porque isso é verdade! Nós demos uma ajudinha para você no final da página[1]. Veja que $\frac{n(n+1)}{2}$ é par se $n(n+1)$ é múltiplo de 4. Como estamos interessados no resto na divisão por 4 de algum número, talvez seja interessante procurar quais os possíveis restos de n na divisão por 4. Podemos escrever n na forma $n = 4q + r$ onde $r = 0, 1, 2$ ou 3. Mãos à obra!

1. Se $n = 4q$ então $\frac{n(n+1)}{2} = 2q(4q+1)$ é par.
2. Se $n = 4q + 1$ então $\frac{n(n+1)}{2} = (2q+1)(4q+1)$ é ímpar.
3. Se $n = 4q + 2$ então $\frac{n(n+1)}{2} = (2q+1)(4q+3)$ é ímpar.
4. Se $n = 4q + 3$ então $\frac{n(n+1)}{2} = (2q+2)(4q+3)$ é par.

Podemos concluir que n deve ser da forma $4q$ ou $4q + 3$. Acabou? Não! Precisamos construir EXEMPLOS para cada uma dessas possibilidades mostrando que realmente esses valores satisfazem o problema.
Para $n = 4q$, considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(1,4), (5,8), (9,12), \ldots, (4q-3, 4q)\}. \\ B &= \{(2,3), (6,7), (10,11), \ldots, (4q-2, 4q-1)\}. \end{aligned}$$

Para $n = 4q + 3$, considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(4,7), (8,11), (12,15) \ldots, (4q, 4q+3)\} \cup \{(1,2)\}. \\ B &= \{(5,6), (9,10), (13,14), \ldots, (4q+1, 4q+2)\} \cup \{(3)\}. \end{aligned}$$

Note que os conjuntos foram divididos em parênteses. Cada parêntese de A possui um correspondente em B com a mesma soma, facilitando a construção de um exemplo generalizado.

14. Se tal construção é possível, então todos os segmentos podem ser agrupados em pares de segmentos intersectantes. Mas o número de segmentos é ímpar!Absurdo!

15. Perceba que cada número aperece em exatamente 8 vezes em todos os 28 dominós. Cada número que número que aparece no interior da cadeia possui um correspondente igual e isso nos permite concluir que cada número apareceu uma quantidade par de vezes no interior da cadeia. Como o 5 está numa ponta e ele deve aparecer um número par de vezes, o número na outra ponta também deve ser 5.

16. Descartando cada dominó com uma casinha vazia, cada um dos outros número aparece em exatamente 7 outros dominós, que é um número ímpar. Como no interior de uma cadeia cada número aparece um número par de vezes, apenas os números da ponta poderiam aparecer uma quantidade ímpar de vezes. Dado que temos mais que dois números distintos para aparecer um número ímpar de vezes, não é possível fazer tal cadeia.

17. Perceba que $|x - y| = \pm x \pm y$ para alguma escolha de sinais. Então a soma total é

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n \pm a_1.$$

Como cada número a_i aparece duas vezes, basta mostrarmos que cada uma das expressões $\pm a_i \pm a_i$ é par para qualquer escolha de sinais. Vejamos os casos:

1. $\pm a_i \pm a_i = +a_i + a_i = 2a_i$ é par.
2. $\pm a_i \pm a_i = -a_i + a_i = 0$ é par.
3. $\pm a_i \pm a_i = +a_i - a_i = 0$ é par.
4. $\pm a_i \pm a_i = -a_i - a_i = -2a_i$ é par.

[1] veja que $2(1 + 2 + \ldots + n) = (1 + n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \ldots + (n+1) = n \times (n+1)$

18. Não. Como a soma de um número par de números ímpares é par. A somas dessas 10 notas só pode ser um número par. Mas 25 é ímpar.

20. Suponha que existem tais inteiros, então:

$$\begin{aligned} \frac{bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde}{abcdef} &= 1 \Rightarrow \\ bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde &= abcdef. \end{aligned}$$

Na última expressão, o lado esquerdo é um número par e o lado direito é um número ímpar. Absurdo!

21. Como esses inteiros só podem ser 1 e -1, para que o produto seja 1, deve existir uma quantidade par de números -1. Para que a soma seja zero, devem existir iguais quantidades de cada um dos dois números possíveis. Entretanto, a quantidade de números -1 não pode ser 11, pois tal número é ímpar.

22. Sejam A, B e C os três gafanhotos. Estaremos interessados apenas na ordem em que os gafanhotos se dispoem ao longo da reta, digamos que inicialmente eles estão na ordem (A, B, C). Podemos fazer os seguintes movimentos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & & & & & & \\ (\mathbf{A}, B, C) & \to & (B, A, \mathbf{C}) & \to & (\mathbf{B}, C, A) & \to & (C, B, A) \end{array}$$

Em cada passo, diponha as letras A, B e C em um círculo e leia a palavra ABC. Percebeu alguma coisa? Antes de efeturamos nosso primeiro movimento, a leitura estava no sentido "horário" e logo em seguida passou para o sentido "anti-horário". Como cada movimento alterna os sentidos, após 1991 movimentos estaremos em um sentido diferente do original. Logo, não é possível retornarmos para a posição original.

23. Não é possível. Perceba que quando escolhemos um número para trocarmos de sinal, por exemplo, de $+$ para $-$, a soma total varia o dobro do número escolhido, ou seja, a paridade da soma não muda. Basta ver agora que $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ não tem a mesma paridade que 0. Uma INVARIANTE é a paridade da soma.

26. Não é possível. Pinte o tabuleiro de preto e branco da maneira usual. Cada dominó cobre exatamente um quadrado preto e outro branco (Invariante), portanto, a quantidade de quadrados pretos cobertos é igual à quantidade quadrados brancos cobertos. Como $a1$ e $h8$ têm a mesma cor, sobrariam 30 quadrados de uma cor e 32 de outra para serem cobertos. Absurdo!

27. Consideremos um ponto genérico X. Ele pode estar a direita de B ou a esquerda de A. Ou ocorre: $\overline{AX} + \overline{AB} = \overline{BX}$ ou $\overline{BX} + \overline{AB} = \overline{AX}$. Assim, se estivéssemos somando em x as distâncias dos 45 pontos para A e em y para B, estaríamos na verdade só somando uma diferença de AB em x ou em y. Como 45 é ímpar, não podemos "distribuir"uma igual quantidade de $\overline{AB}$'s para o grupo de A e o de B. Assim, segue que não é possível.

29. Suponha, por absurdo, que seja possível. Tomemos o Soldado Ryan, ele possui 99 companheiros. Suponha que ele em particular tenha conseguido ficar exatamente uma vez de pernoite com cada um dos outros. A cada dia, Ryan formava 2 duplas diferentes, que não poderiam se repetir nos dias posteriores. Caso Ryan tivesse pernoitado x vezes, a quantidade de duplas que ele teria formado seria $2x$, que por hipótese, deve ser igual a 99. Chegando a conclusão que 99 é par. Absurdo!

30. Suponha, por absurdo, que não necessariamente haja uma pessoa que possua duas garotas como vizinhas. Denotemos h para garoto e m para garota. Cada pessoa ou possui como vizinho $2h$ ou $h + m$. Somando todas as 50 possibilidades, devemos estar contando cada pessoa duas vezes (já que essa é vizinho de duas pessoas). Assim: $x(2h) + y(h + m) = 50h + 50m$ Onde x é o número de pessoas que tem 2 garotos como vizinhos e y é o numero de pessoas que tem um garoto e uma garota. Notemos ainda que $x + y = 50$. Obtemos $xh = (50 - y)m$ assim $xh = xm$. Mas x garotos só serão iguais a x garotas, se x for nulo. Assim, todas as pessoas tem um garoto e uma garota como vizinhos. Pintemos as 50 posições do círculo apenas de branco e preto. E analisemos apenas as pretas. Todas as pretas terão que ter vizinhos sendo um garoto e uma garota. Logo, as casas brancas serão alternadas: garoto, garota, garoto... Absurdo. Pois com 25 casas brancas, a última e a primeira branca haverá 2 garotos. Absurdo! Segue o resultado.

31.

Suponha sem perda de generalidade que o quadrado do canto esquerdo superior é preto. A partir desse quadrado, numere as colunas da esquerda para a direita e as linhas de cima para baixo. Some os números das colunas em posições ímpares e os números das linhas em posições pares. Perceba que cada quadrado preto do tabuleiro é contado apenas uma vez nesse soma enquanto que os quadrados brancos das linhas e colunas mencionadas são contados duas vezes. Logo, essa soma tem a mesma paridade que a soma de todos os números escritos nos quadrados pretos. Como a soma de quaisquer linhas e colunas é sempre par, a soma dos números nos quadrados pretos é par.

34. Vamos tentar fazer alguns casos pequenos. É fácil ver que não conseguimos fazer o que o enunciado pede com os números $1, 1, 2, 2$ mas com os números $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4$ temos um exemplo:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
a_3	a_4	a_2	b_3	b_2	b_4	a_1	b_1
3	**4**	**2**	**3**	**2**	**4**	**1**	**1**

Contando da esquerda para a direita, denotemos por a_i e b_i as posições do primeiro e segundo número i, respectivamente. No nosso exemplo, $a_2 = 3$ e $b_2 = 5$. Como existem $i - 1$ números entre dois números $i's$, devemos ter $b_i - a_i = i$. Se é possível escrever os números $1, 1, 2, 2, \ldots n, n$ em linha como no enunciado, obtemos:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \ldots a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) &= 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n+1) \\ (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots (b_n - a_n) &= 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Somando as duas linhas,

$$2(b_1 + b_2 + \ldots b_n) = \frac{n(5n+3)}{2}$$

Como o lado esquerdo é sempre par, a fração $\frac{n(5n+3)}{2}$ deve ser um inteiro par. Isso já restringe os possíveis valores de n. Para $n = 1986$,

$$\frac{n(5n+3)}{2} = 9863469$$

é ímpar e consequentemente não é possível dispormos esses números em linha. Uma pergunta natural que você deve tentar descobrir é, para quais n, tal distribuição é possível.

36. Precisamos bolar alguma maneira de agrupar os números em pares. Seja $A = \underbrace{11\ldots11}_{64\ vezes}0$ repetições do número 1. Como 1111 é múltiplo de 101 é fácil ver que A é múltiplo de 101. Para todo número de 64 dígitos $a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{63} a_{64}}$, sem zeros em sua representação decimal, considere o seu conjugado $b = \overline{b_1 b_2 \ldots a_{63} b_{64}} = (10 - a_1)(10 - a_2) \ldots (10 - a_{64})$. Nenhum dígito de a é igual a zero, portanto, cada número $10 - a_i$ pertence ao conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Da equação $a + b = A$ obtemos que a é divisível por 101 se e somente se b é divisível por 101(lembre-se que A é múltiplo de 101!). Como o único número que é igual ao seu conjugado é o número $\underbrace{55\ldots55}_{64\ vezes}$(que é múltiplo de 101!) e os demais números que satisfazem o enunciado podem ser pareados, concluímos que a quantidade procurada é ímpar.

37. Uma idéia natural é tentar agrupar as soluções em pares. Qualquer solução com $a_1 \neq a_2$ pode ser pareada com a outra solução obtida pela troca de posição entre a_1 e a_2. Logo, B_{10} tem a mesma paridade que o número de soluções com $a_1 = a_2$. Das soluções com $a_1 = a_2$, podemos parear aquelas que tem $a_3 \neq a_4$ da mesma maneira. Repetindo esse argumento com (a_5, a_6), (a_7, a_8) e (a_9, a_{10}), concluímos que a paridade de B_{10} é a mesma do número de soluções com $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$ e $a_9 = a_{10}$, ou seja, das soluções de:

$$\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_3} + \frac{2}{a_5} + \frac{2}{a_7} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Como anteriormente, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_3$ e $a_5 = a_7$ da equação:

$$\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_5} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Mais uma vez, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_5$ da equação:

$$\frac{8}{a_1} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Agora ficou fácil! Basta contar explicitamente o número de soluções da equação anterior. Como fazer isso? Bem, ela pode ser fatorada como:

$$(a_1 - 8)(a_9 - 2) = 16$$

que admite 5 soluções correspondendo as fatorações de 16 como $2^i \times 2^{4-i}$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Então B_{10} é ímpar.

38. Suponha que quaisquer duas pessoas tenham um número ímpar de amigos em comum e seja A um dos participantes da festa. Seja $M = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ o conjunto dos amigos de A. Considere uma nova festa restrita apenas ao conjunto M. Como cada F_i tem um número ímpar de amigos em comum com A, na nova festa, cada F_i possui um número ímpar de amigos. Pelo problema 12, k deve ser par. O mesmo argumento vale para qualquer pessoa na festa e consequentemente todos conhecem um número par de pessoas. Peça para cada um dos amigos de A fazerem uma lista de seus amigos diferentes de A. A soma da quantidade de nomes listados é par, pois é uma soma de uma quantidade par (igual a k) de números ímpares (cada F_i possui um número ímpar de amigos diferentes de A). Agora comparemos o número de aparições de cada uma das $2n - 1$ pessoas diferentes de A nessas listas. Se cada uma delas aparecer em um número ímpar de listas, a soma total de todos os nomes em todas as listas seria ímpar (Lembre-se que a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar!). Mas isso é uma contradição. Logo, existem duas pessoas na festa com um número par de amigos em comum.