XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível 2

Pontos Retas e Círculos

Cícero Thiago

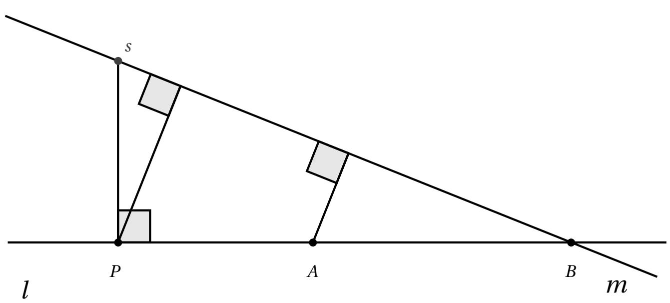
O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

O objetivo deste artigo é apresentar alguns resultados e problemas elementares de geometria combinatória. Para isso precisaremos de algumas ferramentas. São elas:
- princípio das casas de pombo;
- princípio do elemento extremo;
- princípio da indução finita;
- técnicas básicas de contagem;
- continuidade discreta;
- teoremas clássicos de geometria plana.

1 Pontos, retas e círculos

Teorema 1. (**Sylvester**) Um conjunto finito S de pontos no plano é tal que qualquer reta que passa por 2 pontos passa também por um terceiro. Então todos os pontos estão sobre uma reta.

Demonstração 1. Considere o conjunto L das retas que passam por dois pontos de S. Cada ponto de S tem uma distância associada a cada reta de L. Como L e S são conjuntos finitos então temos um número finito de distâncias. Considere o par (l, s) do ponto $s \in S$ e $l \in L$ com a menor distância não nula associada. Como l passa por dois pontos de S então deverá passar por um terceiro. Pelo menos dois pontos de S, digamos A e B, deverão estar do "mesmo lado" de l determinado por P (pé da perpendicular de s até l).



Assuma que A esteja entre B e P. Seja m a reta que passa B e s então:

$$d(A, m) \leq d(P, m) < d(s, l).$$

O que contraria a minimalidade da distância associada ao par (s, l). Assim todas as distâncias devem ser nulas e, com isso, todos os pontos são colineares.

Exemplo 1. Seja P uma família de retas no plano tais que quaisquer 3 retas de P possuem um ponto comum. Prove que todas as retas de P possuem um ponto comum.

Solução. Dado que quaisquer três retas de P possuem um ponto comum, então quaisquer duas retas de P possuem um ponto comum. Considere duas retas arbitrárias l_1 e l_2 de P. Seja x o ponto de intersecção das retas l_1 e l_2. Então qualquer outra reta de P também passa por x.

Exercícios propostos

1. Seja P uma família de pontos do plano tais que quaisquer 3 pontos de P são colineares. Prove que todos os pontos de P são colineares.

2. Sejam P_1, P_2 e P_3 famílias de retas do plano tais que quaisquer 3 retas, uma de cada família, possuem um ponto comum. Prove que todas as retas de uma das famílias P_1, P_2 e P_3 possuem um ponto comum.

3. Um milhão de retas são desenhadas em um plano com as seguintes propriedades:
(a) Quaisquer duas retas não são paralelas.
(b) Ao menos uma outra reta passa pelo ponto de interseção de duas retas. Prove que todas as retas passam por um ponto.

4. São dados $n \geq 3$ pontos no plano nem todos alinhados. Prove que são necessárias pelo menos n retas para unir todos os possíveis pares de pontos.

5. Seja S um conjunto finito de pontos no plano tais que não existem 3 colineares e nem todos eles pertencem a uma circunferência. Prove que existe uma circunferência que passa por exatamente três deles.

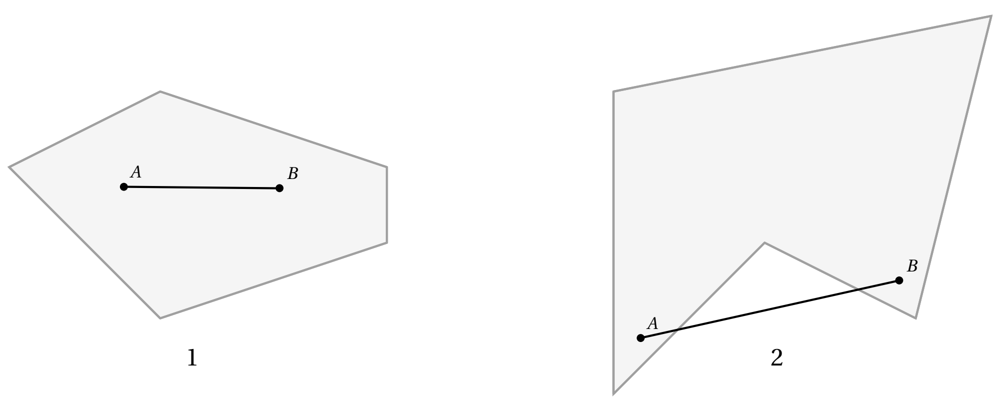
6. Prove que se um conjunto de pontos do plano é tal que cada ponto é ponto médio de outros dois pontos, então o conjunto é infinito.

7. Dados $2n+2$ pontos no plano tais que não existem três colineares. Prove que existe uma reta que passa por dois pontos e separa n pontos dos outros n pontos.

8. (IMO Short list) Dados $2n+3$ pontos no plano tais que não existem três colienares e quatro sobre uma circunferência. Prove que existe um círculo que passa por três desses pontos e possui n desses pontos em seu interior.

2 Convexidade

Definição 1. Uma figura plana será chamada de *convexa* se, dados quaisquer dois pontos da figura, o segmento que os une estiver totalmente contido na figura. Logo abaixo temos a figura 1 convexa e a figura 2 não convexa.

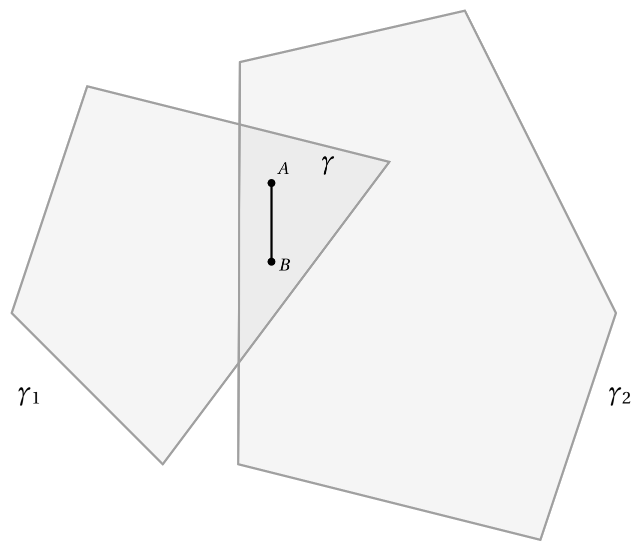


1 2

Um círculo e um triângulo são figuras convexas. Um quadrilátero pode ser ou não convexo.

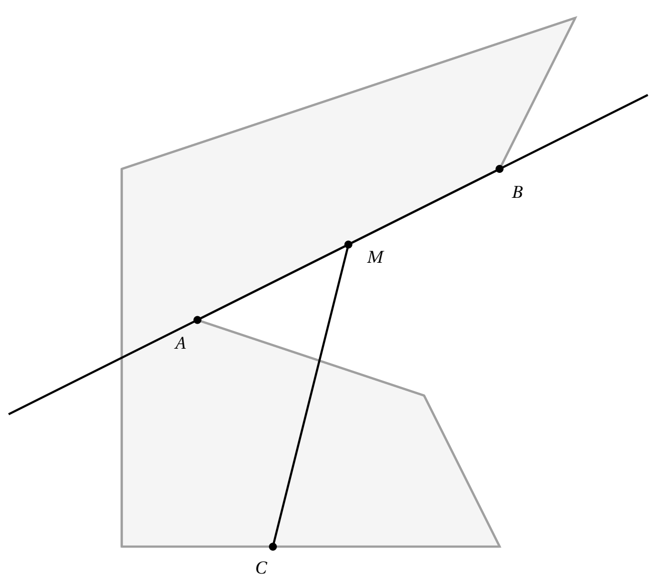
Teorema 2. A intersecção de duas ou mais figuras convexas é também uma figura convexa.

Demonstração 2. Sejam γ_1 e γ_2 duas figuras convexas e seja γ a intersecção das figuras. Sejam A e B dois pontos quaisquer na intersecção, como mostrado na figura abaixo. Pela definição de intersecção, os pontos A e B estão em γ_1 e, como γ_1 é convexa, então o segmento AB está contido em γ_1. Da mesma forma o segmento AB está contido em γ_2. Dessa forma o segmento AB está contido em γ e, com isso, γ será uma figura convexa.



Teorema 3. Todo polígono convexo é a intersecção de um número finito de semiplanos.

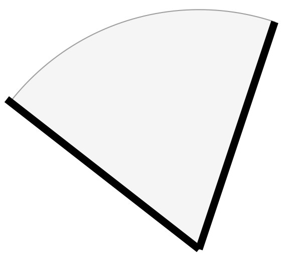
Demonstração 3. Um polígono convexo γ está inteiramente contido em um dos dois semiplanos determinados pela reta suporte de um de seus lados. Com efeito, se existe um ponto C de γ que não esteja no mesmo semiplano do polígono, determinado pela reta suporte do lado AB (A e B são dois vértices adjacentes do polígono). Então o segmento MC, que liga um ponto M no interior do segmento AB ao ponto C, não está totalmente contido em γ. Dessa forma o polígono não seria convexo. Portanto, um polígono convexo está contido em um dos dois semiplanos determinados pela reta suporte de um de seus lados. A intersecção de todos esses semiplanos é o polígono γ.



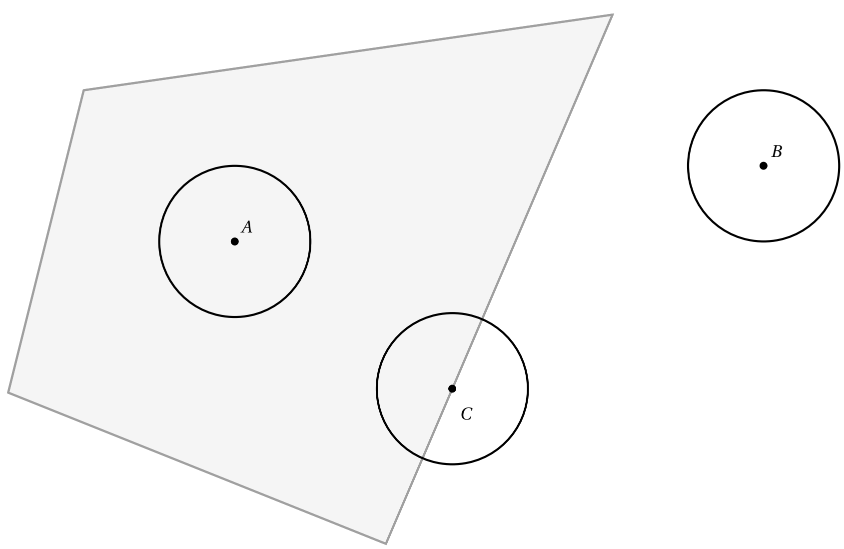
Definição 2. Uma figura será chamada de *limitada* se estiver inteiramente contida em um círculo de raio fixo. Qualquer triângulo e qualquer paralelogramo são exemplos de figuras limitadas.

Na maioria dos exemplos que aparecerão neste texto usaremos figuras que não necessitam serem limitadas. Quando isto for necessário será dito de maneira explícita.

Logo abaixo um ângulo que é um exemplo de figura não limitada.



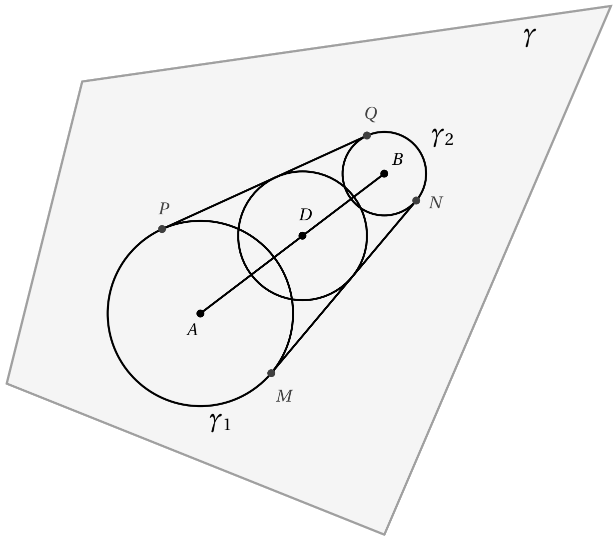
Definição 3. Um ponto do plano será chamado de *ponto interior* em relação a uma figura dada se é centro de um círculo (com raio suficientemente pequeno) que está totalmente contido na figura. Um ponto será chamado de *ponto exterior* em relação a uma figura dada se é centro de um círculo que não possui pontos da figura. E um ponto será chamado de *ponto de bordo* se todo círculo com centro no ponto tiver pontos da figura e do exterior da figura.



Na figura acima A é um ponto interior, B é um ponto exterior e C é um ponto do bordo.

Teorema 4. Se A e B são pontos interiores de uma figura convexa γ, então todos os pontos do segmento AB são pontos interiores de γ.

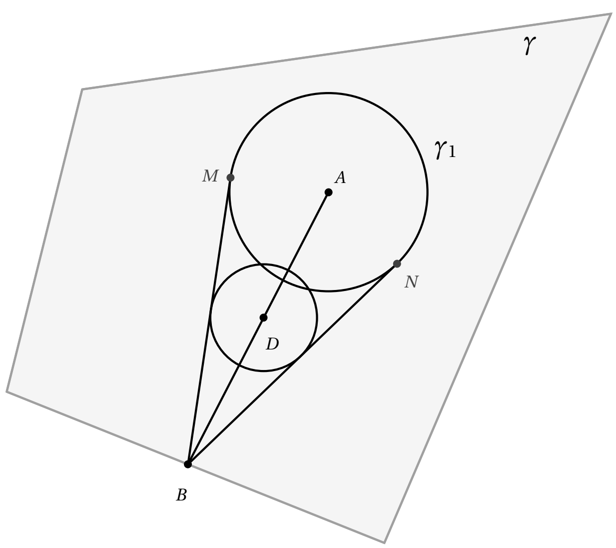
Demonstração 4. Sejam A e B dois pontos interiores da figura γ. Pela definição de ponto interior existem dois círculos γ_1 e γ_2 cujos centros são, respectivamente, A e B que estão totalmente contidos em γ. Sejam MN e PQ as tangentes externas comuns aos círculos γ_1 e γ_2.



Como γ é uma figura convexa então a figura curva $MNQP$ está inteiramente contida em γ. Consequentemente todo ponto D do segmento D é centro de um círculo que está inteiramente contido em γ.

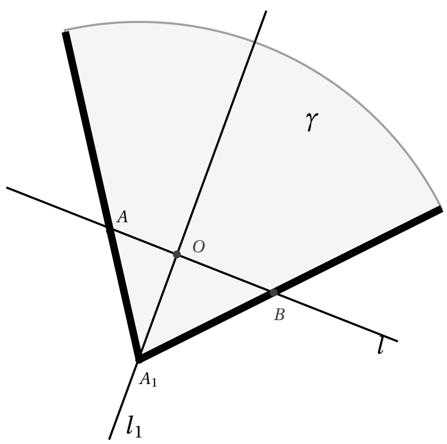
Teorema 5. Se A é um ponto interior e B é um ponto do bordo de uma figura convexa γ, então todos os pontos do segmento AB, exceto B, são interiores a γ.

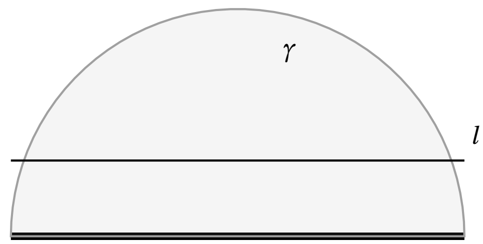
Demonstração 5. A prova difere muito pouco da prova do teorema 4. Basta substituirmos o círculo γ_2 pelo ponto B e a figura $MNQP$ pela figura curva MBN.



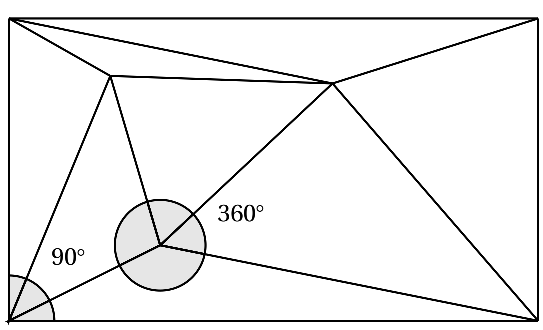
Teorema 6. Toda reta que passa por um ponto interior de uma figura convexa intersecta o bordo da figura em no máximo dois pontos. Se a figura convexa for limitada, então toda reta passando por um ponto interior intersecta o bordo da figura em exatamente dois pontos.

Demonstração 6. Seja γ uma figura convexa, O um ponto interior e l uma reta passando por O. Como a reta l é uma figura convexa, a sua intersecção com γ será também uma figura convexa: um segmento, uma semirreta ou uma reta. Se esta intersecção for um segmento então os extremos do segmento, os pontos A e B, são pontos do bordo de γ, dessa forma l contém dois pontos do bordo. Se esta intersecção é uma semirreta, representada pela intersecção de l_1 com γ, então A_1 será o único ponto do bordo de γ que está sobre a reta. Por fim, Se a intersecção for a reta inteira, como na figura da direita, então não existem pontos do bordo de γ na reta. Se a figura γ for limitada a intersecção com a reta l será também limitada e, portanto, um segmento. Assim, toda reta l que passa por um ponto interior de uma figura convexa limitada contém exatamente dois pontos do bordo da figura.





Exemplo 2. (Colorado Mathematical Olympiad) Para a sua festa de aniversário de 100 anos George convidou 202 amigos. Eles lhe presentearam com um bolo de aniversário retangular com, é claro, 100 velas sobre ele tais que não existem três velas, ou duas velas e um canto do bolo, ou uma vela e dois cantos do bolo sobre uma mesma reta. George irá cortar o bolo em pedaços triangulares por cortes retos ligando velas umas com as outras ou com cantos do bolo de tal maneira que todas as velas serão usadas. Prove que existem pedaços suficientes para atender a todos os convidados com um pedaço de bolo, mas não sobrará nenhum pedaço para George.



Solução.
Admita que George conseguiu cortar o bolo em n triângulos de acordo com as condições do problema. Agora vamos calcular a soma S dos ângulos internos internos dos n triângulos da seguinte maneira: 360° ao redor de cada uma das 100 velas e 90° em cada um dos cantos do bolo. Portanto,

$$180^\circ \cdot n = 360^\circ \cdot 100 + 90^\circ \cdot 4 \Longleftrightarrow n = 202.$$

Portanto, todos os convidados ganham um pedaço e não sobra nada para George.

Exercícios propostos

1. Se A e B são pontos do bordo de uma figura convexa γ, então todos os pontos do segmento AB são pontos do bordo de γ ou todos os pontos do segmento AB, exceto A e B, são pontos interiores.

2. Se toda reta passando por um ponto interior qualquer de uma figura limitada intersecta o bordo da figura em dois pontos, então a figura é convexa.

3. São dados quatro pontos no plano tais que nem todos estão alinhados. Prove que podemos sempre escolher três deles tais que pelo menos um dos ângulos internos do triângulo formado por eles não excede $45°$. Prove que existe uma configuração dos quatro pontos tal que nenhum dos triângulos formados por quaisquer três deles possui algum ângulo menor que $45°$.

4. Seja P um ponto no interior de um polígono convexo de n lados e sejam P_1, P_2, ..., P_n as projeções de P sobre as retas que contém os lados do polígono. Prove que pelo menos uma dessas projeções está no interior de um lado do polígono.

5. Sejam k pontos no interior de um quadrado de lado 1. Uma triangulação desse quadrado com vértices nesses k pontos e nos vértices do quadrado é tal que a área de cada triângulo é no máximo $\frac{1}{12}$. Prove que $k \geq 5$.

6. (Estônia) Um polígono regular de 2010 lados é dividido em triângulos. Determine o menor número possível de triângulos.

7. (OBM) Seja P um polígono convexo de perímetro p. Construímos uma curva fechada Y de área S de modo que qualquer ponto de Y seja exterior ao polígono e diste pelo menos k (k constante) de qualquer ponto do polígono. Prove que:
$$S \geq (p + k\pi)k.$$

8. (OBM) Considere todos os círculos cujas circunferências passam por três vértices consecutivos de um polígono convexo. Prove que um destes círculos contém todo o polígono.

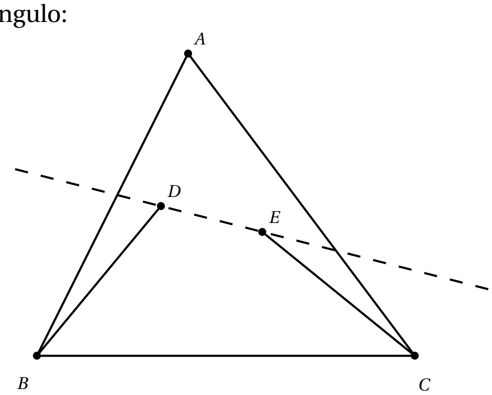
9. Dados n pontos no plano, demonstre que existem três deles que determinam um ângulo menor ou igual a $\frac{\pi}{n}$.

3 Fecho convexo

Definição 4. O *Fecho convexo* de um conjunto finito de pontos do plano é o menor conjunto convexo que contém todos os pontos de S. No caso dos pontos do plano, que não estejam todos alinhados, o fecho convexo será um polígono convexo.

Exemplo 3. Prove que se são dados cinco pontos no plano tal que nunca três deles estão sobre uma reta, então sempre é possível encontrar quatro pontos entre eles que são vértices de um quadrilátero convexo.

Solução. Se o fecho convexo for um pentágono então quaisquer 4 vértices determinam um quadrilátero convexo. Se o fecho convexo for um quadrilátero esse será o próprio quadrilátero convexo. Vamos analisar o caso em que o fecho convexo seja um triângulo:



Vamos representar os vértices do triângulo pelos pontos A, B e C e os outros dois pontos por D e E. Os pontos D e E são obrigatoriamente pontos interiores ao triângulo pois não existem três pontos colineares. Além disso, a reta que passa pelos pontos D e E intersecta dois lados do triângulo, pois eles não podem estar alinhados com um dos vértices. Portanto, é fácil ver que os pontos B, C, D e E determinam um quadrilátero convexo.

Exercícios propostos

1. (OCM) Dados seis pontos distintos do plano, sejam a e b respectivamente a maior e a menor das distâncias entre dois quaisquer destes pontos. Mostre que $\frac{a}{b} \geq \sqrt{3}$.

2. (Hungria) Seis pontos no plano são tais que quaisquer três deles não são colineares. Prove que existem três desses pontos que determinam um triângulo com um ângulo maior ou igual a 120°.

3. (Cone Sul) Achar todos os inteiros $n > 2$ tais que exista um conjunto S_n, formado por n pontos no plano, satisfazendo as seguintes condições:
(a) Três pontos quaisquer não são colineares.
(b) Nenhum ponto é interior a qualquer círculo que tenha por diâmetro dois dos pontos de S_n.

4. (OBM) Existe um conjunto A de n pontos ($n \geq 3$) em um plano tal que:
(i) A não contém três pontos colineares e
(ii) dados quaisquer três pontos pertencentes a A, o centro da circunferência que contém estes pontos também pertence a A?

5. (Proposto para a Cone Sul) Quatro pontos são *tetramigos* se não são colineares e em alguma reordenação P_1, P_2, P_3, P_4 desses pontos temos que a reta que passa por P_1 e P_2 bissecta o segmento cujos extremos são P_3 e P_4. Qual é o maior valor de N ($N > 3$) para o qual existem N pontos tais que quaisquer quatro deles são tetramigos?

6. (IMO) Determine todos os conjuntos finitos S de pontos do plano com pelo menos três elementos que satisfazem a seguinte condição:
Para quaisquer dois pontos distintos A e B de S, a mediatriz do segmento AB e? um eixo de simetria de S.

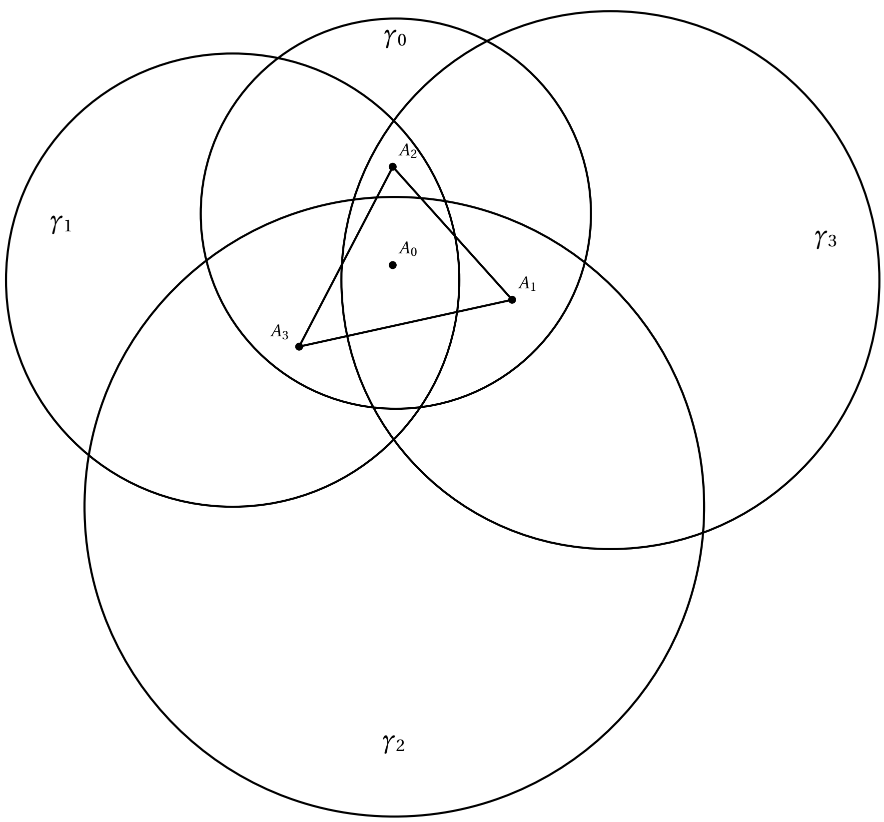
7. (IMO) Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem n pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no plano, e números reais $r_1, r_2, \ldots, r_n$ satisfazendo as condições:
(a) não existem três pontos A_i, A_j, A_k colineares;
(b) para cada tripla i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) o triângulo $A_iA_jA_k$ tem área $r_i + r_j + r_k$.

8. Seja S um conjunto finito de pontos, não havendo três colineares, tal que dados quaisquer 4 pontos de S eles formam um quadrilátero convexo. Mostre que S é um conjunto de vértices de um polígono convexo.

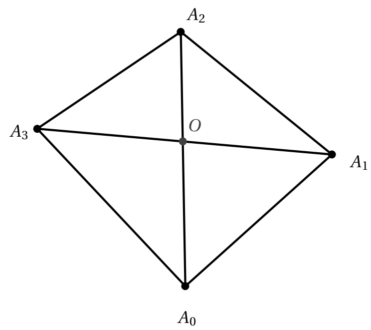
4 Teorema de Helly

Exemplo 4. Sejam quatro figuras convexas no plano tais que quaisquer três delas possuem pelo menos um ponto comum. Prove que todas elas possuem pelo menos um ponto comum.

Solução. Sejam γ_0, γ_1, γ_2 e $\gamma_3$as figuras convexas. Sejam A_0 um ponto na intersecção de γ_1, γ_2 e γ_3, A_1 um ponto na intersecção de γ_0, γ_2 e γ_3, A_2 um ponto na intersecção de γ_0, γ_1 e γ_3 e A_3 um ponto na intersecção de γ_0, γ_1 e γ_2. Como os pontos A_0, A_1 e A_2 estão em γ_3, então o triângulo $A_0A_1A_2$ está totalmente contido em γ_3. Analogamente, o triângulo $A_0A_1A_3$ está em γ_2, o triângulo $A_0A_2A_3$ está em γ_1 e o triângulo $A_1A_2A_3$ está em γ_0. Existem dois casos a serem analisados:
1° caso:
Se o fecho convexo dos pontos A_0, A_1, A_2 e A_3 for um triângulo, então um dos pontos será interior ou do bordo do triângulo. Suponha que A_0 esteja no interior do triângulo $A_1A_2A_3$, então A_0 está nas quatro figuras. O argumento é análogo se um dos pontos for um ponto do bordo do triângulo.



2° caso:
Se o fecho convexo for um quadrilátero então a intersecção O das diagonais é um ponto do bordo dos quatro triângulos $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, $A_0A_1A_3$ e $A_1A_2A_3$ e, portanto, pertence às quatro figuras γ_0, γ_1, γ_2 e γ_3.



Teorema 7. Sejam n figuras convexas no plano tais que quaisquer três delas possuem pelo menos um ponto comum. Então todas elas possuem pelo menos um ponto comum.

Demonstração 7. A prova será por indução. Se o número de figuras é 4, então o teorema é válido, como foi provado no exemplo 3. Agora iremos provar que o teorema é válido para $n+1$ figuras se for válido para n figuras. Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$, $n+1$ figuras convexas dadas, tais que quaisquer três delas possuem pelo menos um ponto na intersecção. Seja $\overline{\gamma_n}$ a intersecção das figuras γ_n e γ_{n+1}. Vamos provar que as n figuras $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \overline{\gamma_n}$ são convexas e quaisquer três delas possuem pelo menos um ponto comum. De fato, temos que quaisquer três figuras distintas de $\overline{\gamma_n}$ possuem pelo menos um ponto comum. Um ponto comum às figuras γ_k, γ_l e $\overline{\gamma_n}$ (que é um ponto comum às figuras γ_k, γ_l, γ_n e γ_{n+1}) existe pois, pelo exemplo 3, se quaisquer 3 figuras entre γ_k, γ_l, γ_n e γ_{n+1} possuem um ponto comum então todas elas possuem um ponto comum. Como isso, quaisquer três figuras entre $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \overline{\gamma_n}$ possuem um ponto comum então, por hipótese de indução, todas elas possuem um ponto comum e, com isso, todas as figuras $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ possuem um ponto comum.
Nota: O teorema de Helly também é valido para uma quantidade finita ou infinita de figuras convexas **limitadas**, mas não é válido para uma quantidade infinita de figuras convexas que não sejam limitadas. Para uma prova detalhada consulte [1].

Exemplo 5. (Hungria) Um plano pode ser coberto completamente por quatro semiplanos. Prove que três destes quatro semiplanos são suficientes para cobrir o plano completamente.

Solução. Considere o complementar de cada um dos semiplanos dados. Se quaisquer três complementares dos semiplanos possuem um ponto comum então, pelo teorema de *Helly*, então todos possuem todos os quatro complementares dos semiplanos possuem um ponto comum. Mas sabemos que os quatro semiplanos cobrem todo o plano, então os quatro complementares dos semiplanos não possuem um ponto comum. Então, existem três complementares dos semiplanos que não possuem um ponto comum, ou seja, os respectivos semiplanos cobriram todo o plano.

Exercícios propostos

1. Sejam n pontos no plano tais que quaisquer três deles estão contidos em uma circunferência de raio 1. Prove que todos os n pontos estão contidos em uma circunferência de raio 1.

2. (**Teorema de Jung**)
   Sejam n pontos no plano tais que quaisquer dois deles estão a uma distância máxima igual a 1. Prove que todos os n pontos estão contidos em uma circunferência de raio $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Dados n pontos no plano $P_1, P_2, \ldots, P_n$, prove que existe um ponto P tal que toda reta r, passando por P, tem pelo menos $\dfrac{n}{3}$ pontos em cada um dos dois semiplanos determinados por r e que incluem r.

5 Distâncias, diâmetros e coberturas

Definição 5. O *diâmetro* de uma figura convexa é a maior distância entre dois pontos, mais precisamente, uma figura F tem diâmetro d se
(i) quaisquer dois pontos de F estão a uma distância no máximo d e
(ii) existem dois pontos x e y de F cuja distância é igual a d.

Exemplo 6. Seis círculos possuem um ponto comum A. Prove que algum dos círculos contém em seu interior ou bordo o centro de algum outro.

Solução. Sejam $O_1, O_2, \ldots, O_6$ os centros dos círculos, nomeados de maneira cíclica de tal maneira que $\angle O_1AO_2$ seja mínimo. Então, $\angle O_1AO_2 \leq 60°$. Agora suponha, sem perda de generalidade, que $O_1A \geq O_2A$. Portanto, o círculo com centro O_1 contém O_2.

Exercícios propostos

1. Prove que todo disco de diâmetro d pode ser decomposto em três partes de diâmetros menores mas não pode ser decomposto em duas partes de diâmetros menores.

   Nota: Existe uma versão mais forte desse problema que é o conhecido teorema de *Borsuk* que diz: "Toda figura plana de diâmetro d pode ser decomposta em três partes de menor diâmetro."Para uma prova do teorema de *Borsuk* você pode consultar [14].

2. (Cone Sul) Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a $\frac{S}{a}$.

3. (Austrália) São dados $n \geq 3$ pontos no plano tais que a área de um triângulo formado por quaisquer três deles é no máximo 1. Prove que os n pontos estão em um triângulo de área no máximo 4.

4. (OCM) Seja T um triângulo de área 1.
   (a) Mostre que existe um paralelogramo de área 2 que o contém.
   (b) Se T está contido num paralelogramo P, mostre que P tem área maior ou igual a 2.
   (**Obs:** Os lados do triângulo podem ter intersecção não vazia com os lados do paralelogramo.)

5. (OBM) Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para a cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe - se que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A?
   Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

6. (OBM) Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá - los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.
   Observação: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

7. (Ibero) Prove que para qualquer polígono convexo de área 1, existe um paralelogramo de área dois que o contém.

6 Contagem e grafos

Teorema 8. (Euler) A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas.

Demonstração 8. Basta observar que, ao somarmos todos os graus, cada aresta é contada duas vezes, uma em cada extremo.

Exemplo 7. Considere um conjunto finito de $n \geq 2$ pontos do plano tais que a distância entre quaisquer dois deles é pelo menos 1. Prove que existem no máximo $3n$ pares de pontos cuja distância entre eles é 1.

Solução. Constura um grafo plano com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ da seguinte maneira: dois vértices serão unidos por uma aresta se, e somente se, a distância entre eles é igual a 1. Seja $D(v_i, v_j)$ a distância entre os vértices v_i e v_j e por $d(v_i)$ o número de arestas que são incidentes ao vértice v_i. Seja $m = \text{máx}\{d(v_i)|i = 1, 2, \ldots, n\}$. Provaremos que $m \leq 6$. De fato, se $m \geq 7$ e seja v um vértice tal que $d(v) = m$. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_m$ os vértices adjacentes e v Como $D(v, v_i) = 1$ e $D(v_i, v_{i+1}) \geq 1$ para $i = 1, \ldots, m$, com $v_{m+1} = v_1$, temos que $\angle v_i v v_{i+1} \geq 60°$ para $i = 1, \ldots, m$. Logo,

$$360° = \sum_{i=1}^{m} \angle v_i v v_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{m} 60° = 60° \cdot m \geq 60° \cdot 7 = 420° > 360°,$$

o que é uma contradição. Portanto, $m \leq 6$ e $d(v_i) \leq 6$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Finalmente, seja N o número de arestas do grafo, temos que

$$2N = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n} 6 = 6n \Leftrightarrow N \leq 3n.$$

Portanto, existem no máximo $3n$ pares de vértices cuja distância entre eles é 1.

Exercícios propostos

1. Dado um polígono convexo de $n \geq 5$ lados, prove que existem no máximo $\dfrac{n(2n-5)}{3}$ triângulos de área 1 que tem seus vértices sendo vértices do polígono.

2. Um conjunto finito de pontos do plano se chama *legal* se não existem três vértices do mesmo que determinam um triângulo equilátero. Prove que qualquer conjunto de n pontos distintos do plano, contém um conjunto legal de, pelo menos, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ pontos.

3. Sejam n pontos, $n \geq 4$, tais que as distâncias entre quaisquer dois pontos do conjunto são números inteiros. Prove que pelo menos uma sexta parte dessas distâncias são múltiplas de 3.

4. Existem 100 pontos no plano tais que quaisquer deles não estão alinhados. Considere todos os possíveis triângulos que tem por vértices esses pontos. Prove que não pode haver mais de 70% dos triângulos acutângulos.

7 Lattice points e o teorema de Pick

Definição 6. Chamaremos de *lattice point* um ponto no plano cartesiano com coordenadas inteiras.

Teorema 9. **(Pick)** Considere um polígono P no plano cartesiano. Se os vértices de P tem todos coordenadas inteiras, então a *Fórmula de Pick* para sua área é

$$A = i + \frac{f}{2} - 1,$$

no qual i e f representam o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e nas arestas do polígono, respectivamente.

Demonstração 9. Para uma prova detalhada do teorema de Pick consulte [10].

Exemplo 8. (Hungria) Prove que se todos os vértices um paralelogramo são lattice points e existe algum outro lattice point no interior ou sobre um lado do paralelogramo, então sua área é maior que 1.

Solução. Pelo teorema de Pick a área do paralelogramo é dado por $A = i + \frac{f}{2} - 1$, em que i e f representam o número de lattice points no interior e nos lados do paralelogramo. O paralelogramo em questão possui pelo menos 5 lattice points, então

$$A \geq 4 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Exercícios propostos

1. Prove que todo triâgulo que possui vértices com coordenadas inteiras possui área sendo um número racional maior ou igual a $\frac{1}{2}$.

2. Prove que todo retângulo com lados medindo a e b, $a \leq b$, possui um lattice point em seu interior ou sobre seus lados se, e somente se, $a \geq 1$ e $b \geq \sqrt{2}$.

3. Dado um pentágono tal que seus vértices são lattice points e seus lados possuem medidas inteiras, prove que seu perímetro é um número par.

4. Quais são os polígonos regulares que possuem vértices com coordenadas inteiras?

5. (OBMU) Seja ϵ um número real positivo arbitrário. Com centro em todos os pontos do plano com coordenadas inteiras, traça - se um círculo de raio ϵ. Prove que toda reta passando pela origem intercepta uma infinidade desses círculos.

6. Sejam A, B e C pontos distintos do plano com coordenadas inteiras. Prove que se $(AB+BC)^2 < 8[ABC]+1$, então A, B e C são vértices de um quadrado.

Sugestões de Leitura Complementar

1. I. M. Yaglom e V. G. Boltyanskii. Convex Figures.
   Toda a parte de convexidade, a prova do teorema de Helly e vários exercícios foram retirados desse maravilhoso livro. Todos os exercícios estão acompanhados das respectivas soluções.

2. H. Hadwiger e H. Debrunner. Combinatorial geometry in the plane.
   Um excelente livro de problemas todos eles acompanhados das respectivas soluções.

3. A. Soifer. Geometric etudes in combinatorial mathematics.
   Um excelente livro de problemas todos eles acompanhados das respectivas soluções.

4. B. M. A. Lerma. Problemas combinatorios sobre conjuntos finitos de puntos.
   Um excelente livro publicado pela sociedade mexicana de matemática o qual retirei vários problemas relacionados ao teorema de Sylvester.

5. D. Maximo e S. Feitosa. Problemas sobre pontos. Revista Eureka, número 25.
   Maravilhoso artigo dos amigos Davi Máximo e Samuel Feitosa o qual retirei a prova do teorema de Sylvester e vários problemas.

6. J. Herman, R. Kucera e J. Simsa. Counting and configurations.
   Um dos melhores livros de combinatória que já vi. Destina boa parte do livro ao estudo de combinatória geométrica. Todos os exercícios propostos estão acompanhados das respectivas soluções.

7. V. Dolnikov. Some problems for mathematical olympiad combinatorial geometry.
   Um excelente livro de problemas publicado pela sociedade mexicana de matemática. Todos os exercícios propostos estão acompanhados das respectivas soluções.

8. J. Araujo, G. Keilhauer, N. Pietrocola e V. Vavilov. Area y volumen.
   O livro possui um capítulo muito bom sobre lattice points.

9. C. D. Olds, A. Lax e G. Davidoff. The geometry of numbers.
   Para um excelente estudo sobre lattice points consulte esse livro.

10. A. L. Pereira e S. T. Melo. Contando áreas (O teorema de Pick).
    Esse artigo traz uma prova detalhada do teorema de Pick.

11. J. M. C. Calero e J. M. S. Martínez. Problemas elementales de olimpiadas matemáticas.
    Um belo livro de problemas todos eles com suas respectivas soluções.

12. A. M. Bruckner, B. S. Thomson e J. B. Bruckner. Mathematical Discovery.
    O livro possui um capítulo muito rico sobre o teorema de Pick.

13. B. Holanda, C. Magalhães, S. Barbosa e Y. Lima. Treinamento Cone Sul, vol. 2.
    Excelente livro (modéstia a parte) de problemas com alguns artigos no final do livro.

14. V. G. Boltianski e I. Ts. Gojberg. División de figuras em partes menores.

15. L. I. Goloviná e I. M. Yaglom. Inducción en la geometría.

16. B. Bollobás. The art of mathematics, Coffie time in Memphis.

17. R. B. Leigh e A. Liu. Hungarian problem book IV.

18. M. L. P. Seguí. Combinatoria avanzada.