XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2
8º ou 9º ano

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – GO – MA – RS – RN – SP – SC

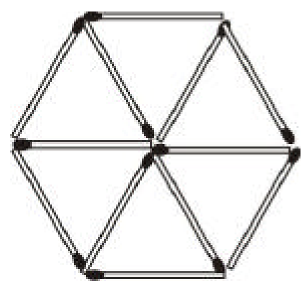
06 de junho de 2009

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1. Se $\frac{1}{8}$ de um número é $\frac{1}{5}$, quanto vale $\frac{5}{8}$ desse número?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** 1 **D)** $\frac{8}{5}$ **E)** 2

2. Usando palitos de fósforos, podemos construir um hexágono regular, formado por seis triângulos equiláteros unitários, como mostra a figura. Juntando mais palitos a esse hexágono, queremos obter outro hexágono regular com o quádruplo da área, também formado por triângulos equiláteros unitários. Quantos palitos deverão ser acrescentados?



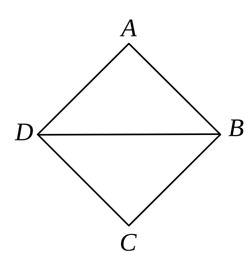
A) 12 **B)** 24 **C)** 30
D) 36 **E)** 48

3. De quantas maneiras dois casais podem sentar-se em quatro cadeiras em fila se marido e mulher devem sentar-se em cadeiras vizinhas?
A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 24

4. Se $\frac{1}{x+5} = 4$, o valor de $\frac{1}{x+6}$ é:

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** 1

5. A figura ao lado é o mapa de um bairro: os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são as casas e os segmentos são as ruas. De quantas casas é possível fazer um caminho que passa exatamente uma vez por cada uma das ruas? É permitido passar mais de uma vez por uma mesma casa.
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4



6. Os inteiros positivos *m* e *n* satisfazem $15m = 20n$. Então é possível afirmar, com certeza, que mn é múltiplo de:
A) 5 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

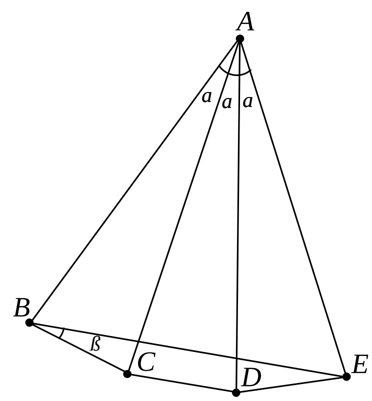
7. Um número natural *A* de três algarismos *detona* um número natural *B* de três algarismos se cada algarismo de *A* é maior do que o algarismo correspondente de *B*. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?
A) 120 **B)** 240 **C)** 360 **D)** 480 **E)** 600

8. Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas, o peso da barra, em gramas, é:

A) 160 **B)** 200 **C)** 240 **D)** 280 **E)** 400

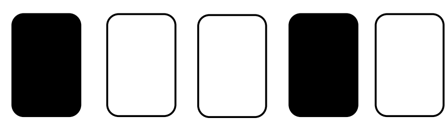
9. Esmeralda lançou um dado dez vezes e obteve 57 como soma de todos os pontos obtidos nesses lançamentos. No mínimo, quantas vezes saíram 6 pontos?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

10. Na figura abaixo, $a = 18^\circ$ e $AB = AC = AD = AE$. O valor do ângulo b é:



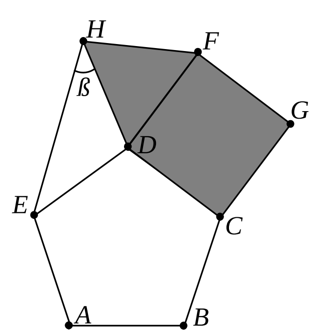
A) 18º **B)** 36º **C)** 15º **D)** 20º **E)** 30º

11. Cinco cartas iguais têm um lado branco e um lado preto. Elas se encontram em fila com a face branca para cima. Um movimento consiste em escolher um único par de cartas vizinhas e virá-las. No mínimo, quantos movimentos são necessários para que as cartas fiquem como na figura ao lado?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5
E) Não é possível obter a configuração acima.

12. Na figura abaixo, *ABCDE* é um pentágono regular, *CDFG* é um quadrado e *DFH* é um triângulo equilátero. O valor do ângulo b é:

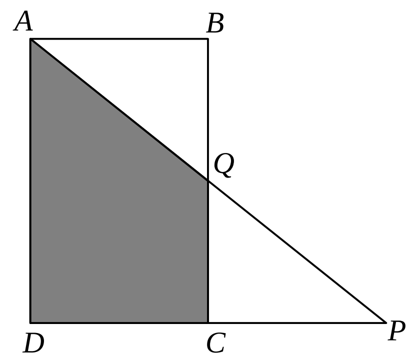


A) 30º **B)** 36º **C)** 39º **D)** 45º **E)** 60º

13. Numa fila para compra de ingressos para um jogo da seleção brasileira, havia 49 pessoas: 25 corintianos, 14 flamenguistas e 10 gremistas. Sabendo que cada pessoa da fila torce para um único time, dois torcedores do mesmo time não estão em posições consecutivas, podemos concluir que:

A) tal fila não existe.
B) algum dos torcedores das extremidades da fila é gremista.
C) algum dos torcedores das extremidades da fila é flamenguista.
D) algum flamenguista é vizinho de um gremista.
E) algum gremista é vizinho de dois corintianos.

14. Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP.
Se AB = 5 cm, AD = 8 cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC?

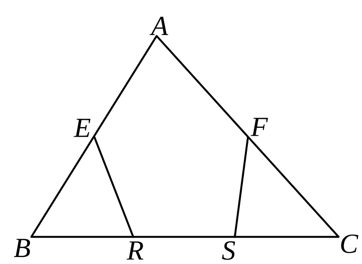


A) 1 cm **B)** 2 cm **C)** 3 cm
D) 4 cm **E)** 5 cm

15. A famosa *Conjectura de Goldbach* diz que todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo, 18 pode ser representado por 5 + 13 ou, ainda, por 7 + 11. Considerando todas as possíveis representações de 126, qual a maior diferença entre os dois primos que a formam?

A) 112 **B)** 100 **C)** 92 **D)** 88 **E)** 80

16. Na figura ao lado, E é o ponto médio de AB, F é o ponto médio de AC e $BR = RS = SC$. Se a área do triângulo ABC é 252, qual é a área do pentágono $AERSF$?



A) 168
B) 189
C) 200
D) 210
E) 220

17. Quantos pares ordenados (x, y) de números reais satisfazem a equação

$$\left(x-y^2\right)^2+\left(x-y-2\right)^2=0?$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** infinitos

18. O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

Questões → Estudantes ↓	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0
⋮				⋮		

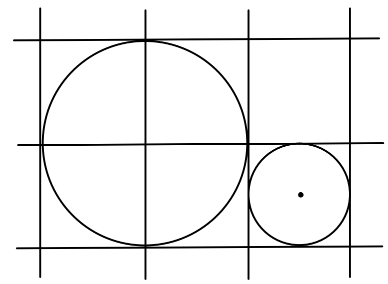
Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade m de acertos. Qual é o valor de m?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

19. Entre os inteiros positivos $n+4018,\ n=1,2,...,2009^2$, quantos são quadrados perfeitos?
A) 1945 **B)** 1946 **C)** 1947 **D)** 1948 **E)** 1949

20. Para cada número natural *n*, seja S_n a soma dos dez primeiros múltiplos positivos de *n*. Por exemplo, S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20. Quanto é $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}$?
A) 2925 **B)** 3025 **C)** 3125 **D)** 3225 **E)** 3325

21. Em uma folha quadriculada em que cada quadrado tem lado 2cm, são desenhados dois círculos como na figura ao lado. A distância mínima entre os dois círculos mede:



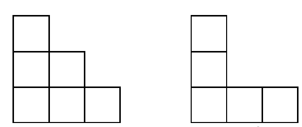
A) 3cm
B) $\sqrt{10}$ cm
C) $\left(\sqrt{10}+3\right)$cm
D) $\left(\sqrt{10}-2\right)$cm
E) $\left(\sqrt{10}-3\right)$cm

22. Quantos números naturais de 1 a 100, inclusive, podem ser escritos na forma de potência a^b, com $a,b\in\mathbb{N}$ e $a,b>1$?
A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

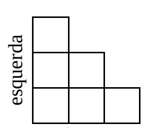
23. Uma folha de caderno de Carlos é um retângulo com dois lados (bordas) amarelos de 24 cm e dois lados (bordas) vermelhos de 36 cm. Carlos pinta cada ponto do retângulo na mesma cor do lado mais próximo desse ponto. Qual é a área da região pintada de amarelo?
A) 144 cm^2 **B)** 288 cm^2 **C)** 364 cm^2 **D)** 442 cm^2 **E)** 524 cm^2

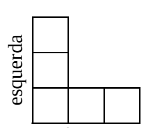
24. Os inteiros $0 < x < y < z < w < t$ são tais que $w = z(x + y)$ e $t = w(y + z)$. Sendo $w = 9$, então t é igual a
A) 45 **B)** 54 **C)** 63 **D)** 72 **E)** 81

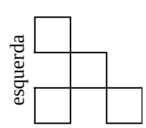
25. Alguns cubos foram empilhados formando um bloco. As figuras ao lado representam a vista da esquerda e da frente desse bloco. Olhando o bloco de cima, qual das figuras a seguir **não** pode ser vista?

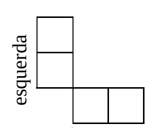


vista da esquerda vista da frente

A) 

B) 

C) 

D) 

E)