

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira
Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – GO – MA – RS – RN – SP – SC

06 de junho de 2009

A duração da prova é de 3 horas.

Cada problema vale 1 ponto.

Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.

Você pode solicitar papel para rascunho.

Entregue apenas a folha de respostas.

Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1. Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B . Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

- A) 120 B) 240 C) 360 D) 480 E) 600

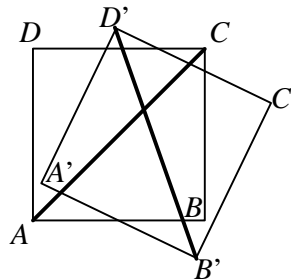
2. Os inteiros positivos m e n satisfazem $15m = 20n$. Então é possível afirmar, com certeza, que mn é múltiplo de:

- A) 5 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20

3. Se $x^2 = x + 3$ então x^3 é igual a:

- A) $x^2 + 3$ B) $x + 4$ C) $2x + 2$ D) $4x + 3$ E) $x^2 - 2$

4. Na figura, o quadrado $A'B'C'D'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado $ABCD$ de 25 graus em torno do ponto médio de AB . Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas AC e $B'D'$?



- A) 5 B) 25 C) 45 D) 65 E) 85

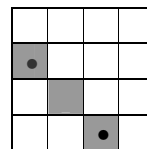
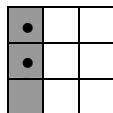
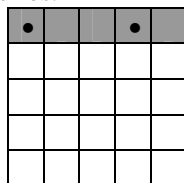
5. Um dos cinco números a seguir é divisor da soma dos outros quatro. Qual é esse número?

- A) 20 B) 24 C) 28 D) 38 E) 42

6. Sempre que Agilulfo volta para casa depois da escola com uma advertência, se sua mãe está em casa, ela o coloca de castigo. Sabendo-se que ontem à tarde Agilulfo não foi colocado de castigo, qual das seguintes afirmações é certamente verdadeira?

- A) Agilulfo recebeu advertência ontem.
B) Agilulfo não recebeu advertência ontem.
C) Ontem à tarde a sua mãe estava em casa.
D) Ontem à tarde a sua mãe não estava em casa.
E) Nenhuma das afirmações acima é certamente verdadeira.

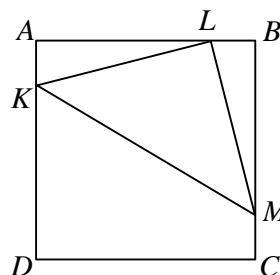
7. Qual é o menor valor de $n > 1$ para o qual é possível colocar n peças sobre um tabuleiro $n \times n$ de modo que não haja duas peças sobre a mesma linha, mesma coluna ou mesma diagonal? As figuras a seguir mostram pares de peças na mesma linha, na mesma coluna e na mesma diagonal em diversos tabuleiros.



- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

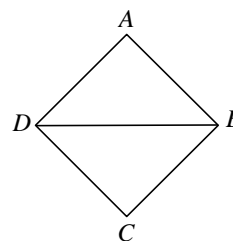
8. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 4, K pertence ao lado AD , L pertence ao lado AB , M pertence ao lado BC e KLM é um triângulo retângulo isósceles, sendo L o ângulo reto. Então a área do quadrilátero $CDKM$ é igual a

- A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14



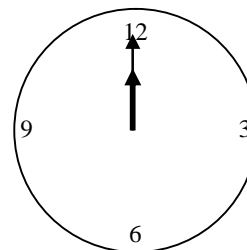
9. A figura ao lado é o mapa de um bairro: os pontos A, B, C e D são as casas e os segmentos são as ruas. De quantas casas é possível fazer um caminho que passa exatamente uma vez por cada uma das ruas? É permitido passar mais de uma vez por uma mesma casa.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



10. O relógio de parede indica inicialmente meio-dia. Os ponteiros das horas e dos minutos irão formar um ângulo de 145 graus pela primeira vez:

- A) entre 12h e 12h10min.
B) entre 12h10min e 12h15min.
C) entre 12h15min e 12h20min.
D) entre 12h20min e 12h25min.
E) após as 12h25min.



11. Considere o número inteiro positivo n tal que o número de divisores positivos do dobro de n é igual ao dobro do número de divisores positivos de n . Podemos concluir que n é

- A) um número primo B) um número par C) um número ímpar
D) um quadrado perfeito E) potência inteira de 2

12. Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 34 E) 45

13. O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

Questões →	1	2	3	4	5	6
Estudantes ↓						
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0
⋮						⋮

Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade m de acertos. Qual é o valor de m ?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

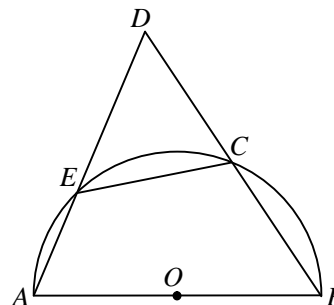
14. Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então $f(2009)$ é:

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 2009

15. Na figura, $CD = BC$, $\angle BAD = 72^\circ$, AB é o diâmetro e O o centro do semicírculo.

Determine a medida do ângulo $\angle DEC$.

- A) 36°
 B) 42°
 C) 54°
 D) 63°
 E) 18°



16. Sabe-se que $2x^2 - 12xy + ky^2 \geq 0$ para todos x, y reais. O menor valor real de k é

- A) 9 B) 16 C) 18 D) 27 E) 36

17. A famosa *Conjectura de Goldbach* diz que todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo, 18 pode ser representado por $5 + 13$ ou, ainda, por $7 + 11$. Considerando todas as possíveis representações de 126, qual a maior diferença entre os dois primos que a formam?

- A) 112 B) 100 C) 92 D) 88 E) 80

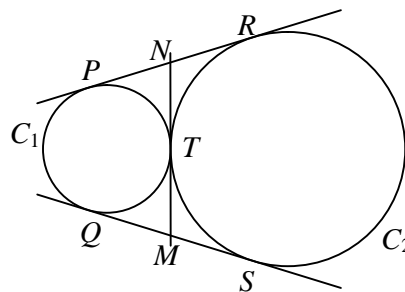
18. Um subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ é *superpar* quando quaisquer dois de seus elementos têm produto par. A maior quantidade de elementos de um subconjunto superpar é:

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 11

19. Para cada número natural n , seja S_n a soma dos dez primeiros múltiplos positivos de n . Por exemplo, $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$. Quanto é $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{10}$?

- A) 2925 B) 3025 C) 3125 D) 3225 E) 3325

20. Os círculos C_1 e C_2 , de raios 3 e 4, respectivamente, são tangentes externamente em T . As tangentes externas comuns tocam C_1 em P e Q e C_2 em R e S . A tangente interna comum em T corta as tangentes externas nos pontos M e N , como mostra a figura. A razão entre as áreas dos quadriláteros $MNPQ$ e $MNRS$ é



- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{13}{15}$

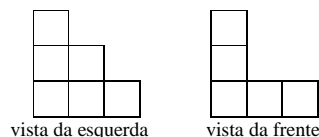
21. Dois carros deixam simultaneamente as cidades A e B indo de uma cidade em direção à outra, com velocidades constantes, e em sentidos opostos. As duas cidades são ligadas por uma estrada reta. Quando o carro mais rápido chega ao ponto médio M de AB , a distância entre os dois carros é de 96 km. Quando o carro mais lento chega ao ponto M , os carros estão a 160 km um do outro. Qual a distância, em km, entre as duas cidades?

- A) 320 B) 420 C) 480 D) 520 E) 560

22. Seja $N = 8^{8 \cdot 8}$, em que aparecem 2009 números 8. Agilulfo ficou de castigo: ele deve escrever a soma dos dígitos de N , obtendo um número M ; em seguida, deve calcular a soma dos dígitos de M ; e deve repetir o procedimento até obter um número de um único dígito. Vamos ajudar Agilulfo: esse dígito é

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 8

23. Alguns cubos foram empilhados formando um bloco. As figuras ao lado representam a vista da esquerda e da frente desse bloco. Olhando o bloco de cima, qual das figuras a seguir **não** pode ser vista?



- A) B) C) D) E)

24. Uma folha de caderno de Carlos é um retângulo com dois lados (bordas) amarelos de 24 cm e dois lados (bordas) vermelhos de 36 cm. Carlos pinta cada ponto do retângulo na mesma cor do lado mais próximo desse ponto. Qual é a área da região pintada de amarelo?

- A) 144 cm^2 B) 288 cm^2 C) 364 cm^2 D) 442 cm^2 E) 524 cm^2

25. Os lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão t . Então a distância entre o incentro e o baricentro deste triângulo é:

- A) t B) $\frac{t}{2}$ C) $\frac{t}{3}$ D) $\frac{2t}{3}$ E) faltam dados