XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível 2

O Quarteto Harmônico e o Problema 6 da OBM

Davi Lopes

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

O Quarteto Harmônico e o Problema 6 da OBM

Prof. Davi Lopes – Semana Olímpica 2016 – OBM – Nível 2

1. Introdução

Muitas vezes, o destino nos encurrala com diversos problemas de geometria bem difíceis. Muitos deles possuem diversas retas, ângulos e algumas relações que parece ser bem difíceis de se usar. Nesse artigo, estudaremos quatro tópicos que podem nos ajudar bastante a resolver esse tipo de situação.

Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva, Quádruplas Harmônicas e Bissetrizes: esses quatro tópicos são o que conhecemos como o *Quarteto Harmônico*, sempre unidos para enfrentar os problemas que o Doutor Destino sempre coloca (Vocês entenderam a referência, né capitães? Tá... minhas piadas estão piores do que as do Spider Man!).

Bom, agora que tal vermos como esses super-teoremas vão nos ajudar a resolver alguns problemas-vilões bem fortes? Vamos lá!

2. O Teorema de Menelaus e o Teorema de Ceva

Primeiro, vamos ver esses dois teoremas, nus e crus, para depois discutir suas aplicações.

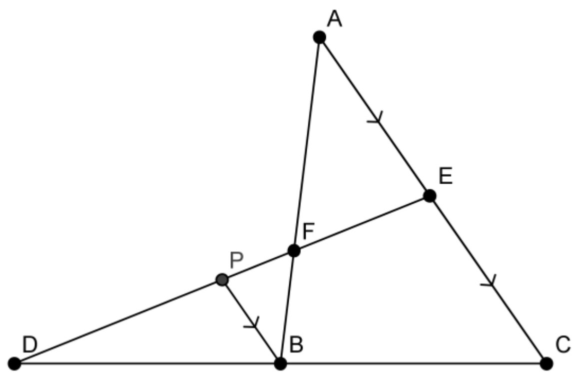
Teorema 1 (Menelaus): Dado um triângulo ABC, seja D um ponto sobre o prolongamento do lado BC e E, F pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente. Então, os pontos D, E, F são colineares se, e somente se:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$

Demonstração: Como o teorema é do tipo se, e somente se, então temos que fazer a demonstração em duas partes:

($\Longrightarrow$) (Se D, E, F são colineares, então $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$)

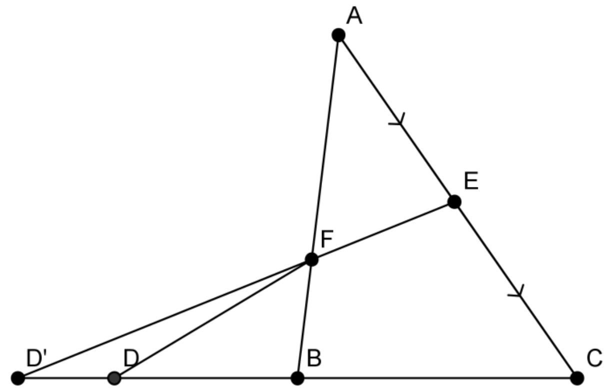
Considere a figura abaixo e seja P um ponto sobre a reta $\overleftrightarrow{DEF}$ tal que $BP \parallel AC$. Esse paralelismo é bem interessante, pois dele conseguimos muitas semelhanças de triângulos, e assim podemos ir às contas!



- Os triângulos *DBP* e *DCE* são semelhantes, logo $\frac{BD}{CD} = \frac{PB}{CE}$ (1)
- Os triângulos *FBC* e *FAE* são semelhantes, logo $\frac{PB}{AE} = \frac{BF}{AF}$ (2)

Multiplicando (1) e (2) membro a membro, temos $\frac{BD}{CD} . \frac{PB}{AE} = \frac{PB}{CE} . \frac{BF}{AF}$, donde concluímos que $\frac{BD}{CD} . \frac{CE}{AE} . \frac{AF}{BF} = 1$, como queríamos provar.

($\Leftarrow$) (Se $\frac{BD}{CD} . \frac{CE}{AE} . \frac{AF}{BF} = 1$, então D, E, F são colineares)



Suponha que os pontos D, E, F não sejam colineares, e suponha ainda que a reta $\overleftrightarrow{EF}$ intersecte a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em D'. Claramente, $D \neq D'$ (Estamos suponde que *D*, *E*, *F* não são colineares). Daí, pela primeira parte do teorema no triângulo ABC, reta $\overleftrightarrow{D'EF}$ (Note que podemos usá-la, uma vez que já provamos que ela é verdadeira):

$$\frac{D'B}{D'C} . \frac{EC}{EA} . \frac{FA}{FB} = 1 \ (3)$$

E pela nossa hipótese:

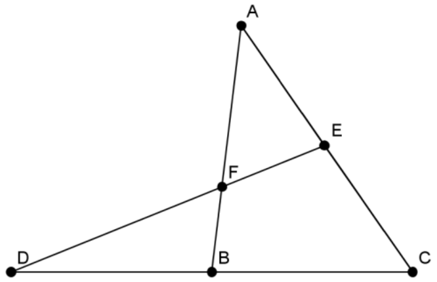
$$\frac{DB}{DC} . \frac{EC}{EA} . \frac{FA}{FB} = 1 \ (4)$$

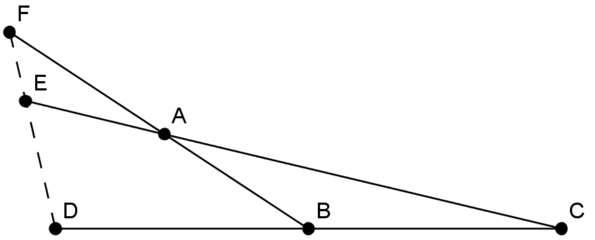
Dividindo (3) por (4), temos:

$$\frac{\frac{D'B}{D'C}}{\frac{DB}{DC}} = 1 \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} \Rightarrow \frac{DB}{DC - DB} = \frac{D'B}{D'C - D'B} \Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{D'B}{BC} \Rightarrow DB = D'B \Rightarrow D = D'$$

Isso é um absurdo, pois $D \neq D'$. Assim, os pontos D, E, F são colineares, e como demonstramos as duas partes do teorema, então ele está demonstrado ■

Só mais uma coisa: podemos aplicar o teorema de Menelaus também quando os pontos D, E, F estão todos sobre os prolongamentos dos lados. Ou seja, podemos aplicar o teorema de Menelaus no triângulo ABC, reta $\overleftrightarrow{DEF}$, nas duas situações abaixo.



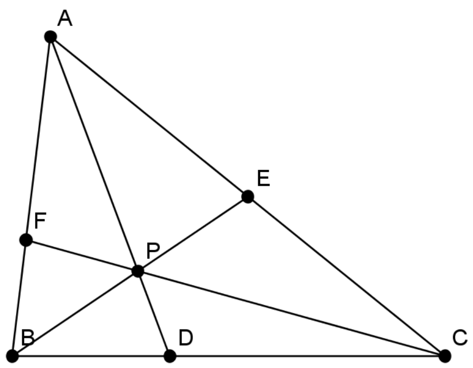


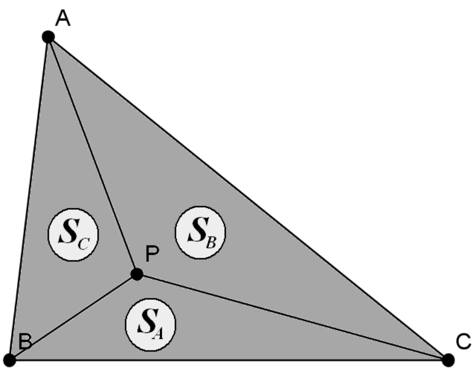
Teorema 2 (Ceva): Dado um triângulo ABC, seja D, E, F pontos sobre os lados BC, CA, AB, respectivamente. Então, as retas AD, BE, CF concorrem se, e somente se:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$

Demonstração: Assim como o teorema de Menelaus, precisamos fazê-lo em duas partes, já que ele é um teorema do tipo se, e somente se.

($\Longrightarrow$) (Se as retas AD, BE, CF concorrem, então $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$)





Vamos supor que $S_A = Área(BPC), S_B = Área(CPA), S_C = Área(APB)$. Então, observe o seguinte: pelas relações de razões entre segmentos como razões entre áreas (Método K), nos triângulos *ABC* e *BPC*, temos que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{Área(ABD)}{Área(ADC)} = \frac{Área(BPD)}{Área(DPC)} = \frac{Área(ABD) - Área(BPD)}{Área(ADC) - Área(DPC)} = \frac{Área(APB)}{Área(APC)} = \frac{S_C}{S_B}$$

Fazendo um raciocínio semelhante para achar $\frac{CE}{AE}$ e $\frac{AF}{BF}$, temos que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S_C}{S_B}, \frac{CE}{AE} = \frac{S_A}{S_C}, \frac{AF}{BF} = \frac{S_B}{S_A}$$

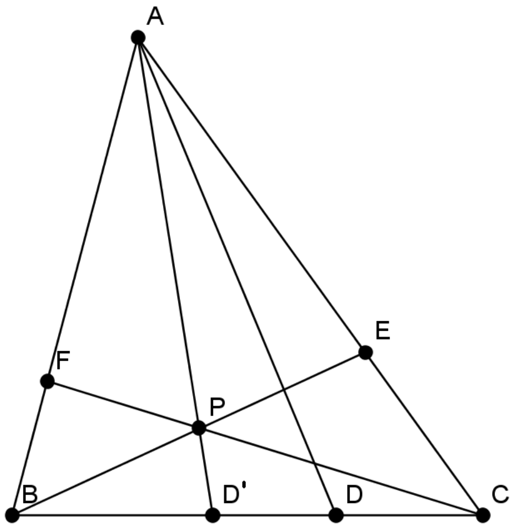
E multiplicando tudo, membro a membro, obtemos

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{S_C}{S_B} \cdot \frac{S_A}{S_C} \cdot \frac{S_B}{S_A} = 1$$

Como queríamos provar.

($\Leftarrow$) (Se $\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}.\frac{AF}{BF}=1$, então AD, BE, CF são concorrentes)

Suponha o contrário, ou seja, AD, BE, CF não sejam concorrentes. Denote por P o ponto de encontro de BE e CF, e suponha que AP intersecte BC em D', como na figura abaixo. Claramente, $D \neq D'$, uma vez que AD, BE, CF não concorrem.



As retas AD, BE, CF são concorrentes. Logo, pela primeira parte, temos que:

$$\frac{D'B}{D'C}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1\ (1)$$

E pela nossa hipótese:

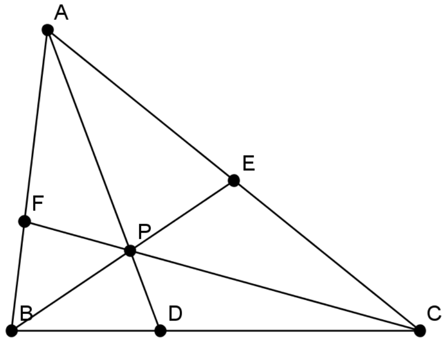
$$\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1\ (2)$$

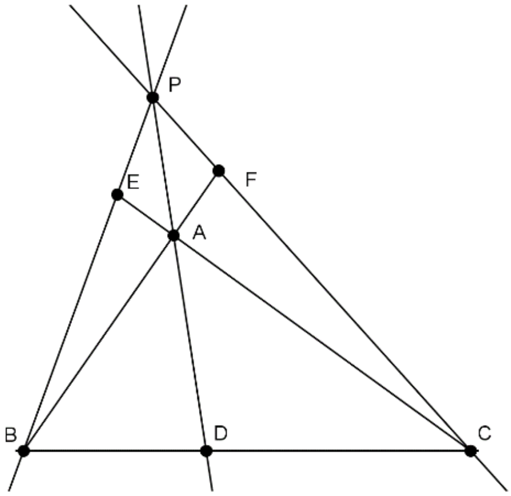
Dividindo (1) por (2), vem:

$$\frac{\frac{D'B}{D'C}}{\frac{DB}{DC}}=1 \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C} \Rightarrow \frac{DB}{DC+DB}=\frac{D'B}{D'C+D'B} \Rightarrow \frac{DB}{BC}=\frac{D'B}{BC} \Rightarrow DB=D'B \Rightarrow D=D'$$

Isso é um absurdo, pois $D \neq D'$. Assim, as retas AD, BE, CF são concorrentes, e como demonstramos as duas partes do teorema, então ele está demonstrado ■

Só mais outra coisa: podemos aplicar o teorema de Ceva também quando dois dos três pontos D, E, F estão sobre os prolongamentos dos respetivos lados, e o terceiro ponto está sobre o respectivo lado. Ou seja, podemos aplicar o teorema de Ceva no triângulo ABC, reta $\overleftrightarrow{DEF}$, nas duas situações abaixo.





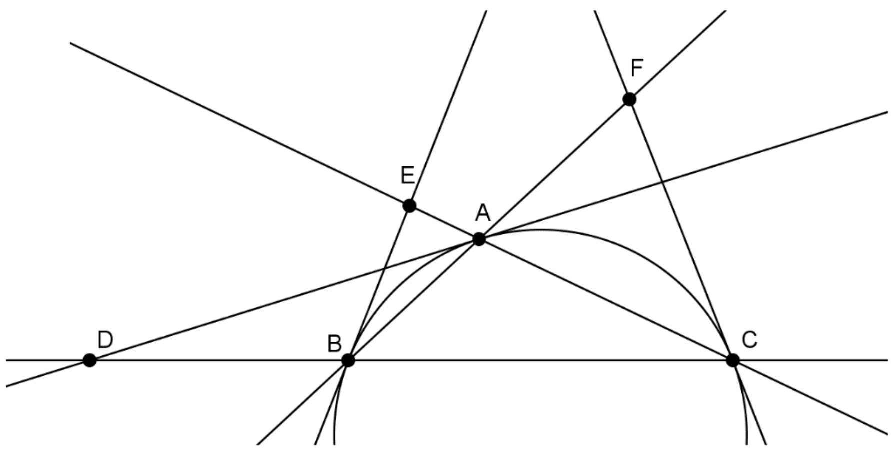
Mais uma observação assaz interessante: já repararam como as fórmulas de Menelaus e Ceva coincidem algebricamente, sendo que a única diferença é na disposição dos pontos? Isso tem uma explicação no *princípio da dualidade*, da Geometria Projetiva. Resumidamente, é como se Menelaus e Ceva fossem dois teoremas equivalentes, ou seja, se você tem um, obtém automaticamente o outro. Demais, não?

3. Aplicações de Menelaus e Ceva

Os teoremas de Menelaus e Ceva são muito úteis para se provar que três pontos são colineares (Menelaus), ou três retas são concorrentes (Ceva). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Seja ABC um triângulo e seja Γ seu circuncírculo. A tangente a Γ pelo ponto A intersecta a reta BC em D; a tangente a Γ por B intersecta CA em E; a tangente a Γ por C intersecta AB em F. Prove que D, E, F são colineares.

Solução: Não é difícil ver que todos os pontos estão fora dos seus respectivos lados, como mostra a figura abaixo. Logo, podemos usar Menelaus no triângulo ABC para mostrar que D, E, F são colineares: basta encontrarmos as razões $\frac{DB}{DC}, \frac{EC}{EA}, \frac{FA}{FB}$.



Como AD é tangente a Γ, temos que $\angle BAD = \angle DCA$, e do fato de que $\angle ADB = \angle CDA$, temos que, pelo caso AA, os triângulos ABD e CAD são semelhantes. Logo:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DB = AD.\frac{AB}{AC} \text{ e } \frac{DC}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DC = AD.\frac{AC}{AB}$$

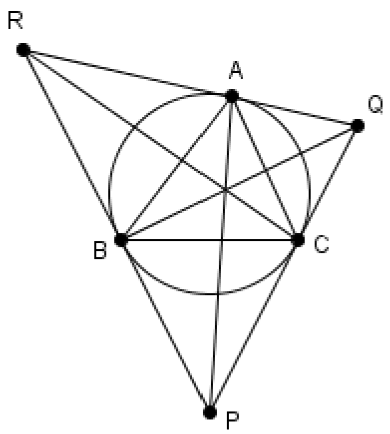
Dividindo as duas expressões, obtemos que $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Analogamente, temos que $\frac{EC}{EA} = \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$ e que $\frac{FA}{FB} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2$. Dessa forma, obtemos que:

$$\frac{DB}{DC}\frac{EC}{EA}\frac{FA}{FB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2\left(\frac{BC}{BA}\right)^2\left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = 1$$

Donde D, E, F são colineares, por Menelaus ■

Exemplo 2: Seja ABC um triângulo e seja Γ seu circuncírculo. As tangentes a Γ por B e C se intersectam em P, as tangentes a Γ por C e A se intersectam em Q e as tangentes a Γ por A e B se intersectam em R. Prove que AP, BQ e CR são concorrentes.

Solução:



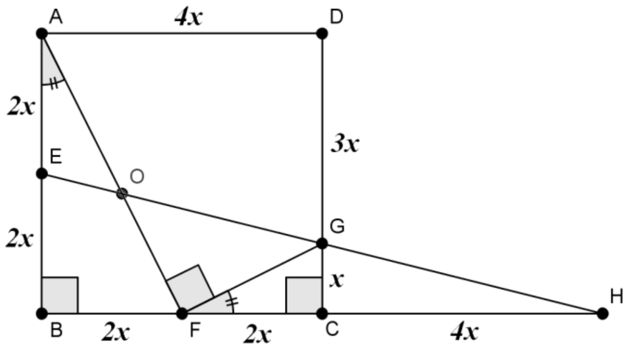
Observe que pelo teorema do bico, temos $x = BP = CP$, $y = CQ = AQ$, $z = AR = BR$. Daí, pelo teorema de Ceva aplicado no triângulo PQR, obtemos que as retas PA, QB, RC são concorrentes, pois A, B, C estão sobre os respectivos lados e:

$$\frac{QA}{RA}.\frac{RB}{PB}.\frac{PC}{QC} = \frac{y}{z}.\frac{z}{x}.\frac{x}{y} = 1 \blacksquare$$

Os teoremas de Ceva e Menelaus não servem apenas para provarmos que três pontos são colineares. Eles são extremamente úteis para se achar razões entre segmentos.

Exemplo 3 (Rioplatense/1997): Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e BC. G é um ponto sobre CD tal que $GD = 3GC$. As retas EG e AF se intersectam em O. Calcula a área do triângulo FGO.

Solução: Primeiro, uma boa figura (você vai ver porque construímos H, mas só depois...), com o lado do quadrado medindo $4x$. Obviamente, podemos achar o valor de x simplesmente notando que o lado do quadrado é igual a um. Logo$1 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.



Agora, note que $\Delta ABF \sim \Delta GFC$ (Caso *LAL*, razão de semelhança: 2), donde temos $\angle GFC = \angle FAB = \alpha \Rightarrow \angle AFB + \angle GFC = (90° - \alpha) + \alpha = 90° \Rightarrow \angle OFG = 90°$, donde temos que o triângulo FGO é retângulo em F. Portanto, para achar a área do triângulo FGO, basta achar os segmentos FG e FO (pois $Área\ (FGO) = \frac{FG.FO}{2}$).

Achar FG é fácil: basta só usar o teorema de Pitágoras no triângulo *FGC:*

$$FG^2 = GC^2 + CF^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2 = 5.\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow FG = \frac{\sqrt{5}}{4} \ \ (1)$$

(Note que de (1) e do fato da razão de semelhança entre os triângulos *ABF* e *GFC* ser igual a dois, temos que $AF = 2FG \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (2))

E para acharmos o comprimento de *OF*? Como vamos fazer? É aí que entra o teorema de Menelaus! Note que, pela construção do ponto *H*, temos que GC é base média do triângulo *EBH*, e, portanto, $CH = BC = 4x$.

Os pontos H, O e E são colineares. Logo, pelo teorema de Menelaus no triângulo *ABF*, reta $\overleftrightarrow{EOH}$, temos que:

$$\frac{HF}{HB}.\frac{BE}{AE}.\frac{AO}{OF} = 1 \Rightarrow \frac{6x}{8x}.\frac{2x}{2x}.\frac{AO}{OF} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OF} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AO + OF}{OF} = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{OF} = \frac{7}{3} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{OF} = \frac{7}{3} \Rightarrow OF = \frac{3\sqrt{5}}{14} \ \ (3)$$

Portanto, de (1) e (3):

$$Área(FGO) = \frac{FG.OF}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}.\frac{3\sqrt{5}}{14}}{2} = \frac{3.\sqrt{5}.\sqrt{5}}{2.4.14} = \frac{15}{112} \ \blacksquare$$

Enfim, os teoremas de Menelaus e Ceva possuem várias aplicações, mas em geral elas se baseiam em dois princípios: provar que três pontos são colineares (ou três retas são concorrentes), e achar razões entre segmentos (que muitas vezes servem para acharmos segmentos, como fizemos no exemplo 3). Portanto, é preciso praticar para obter o hábito de manipular com tais problemas.

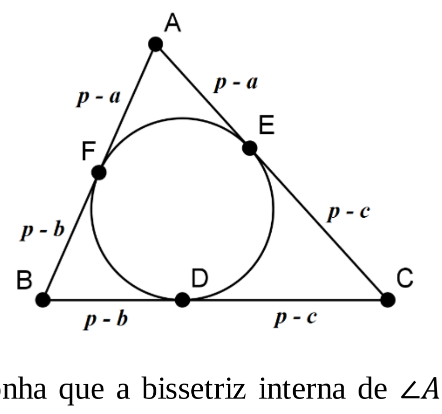
Exercícios

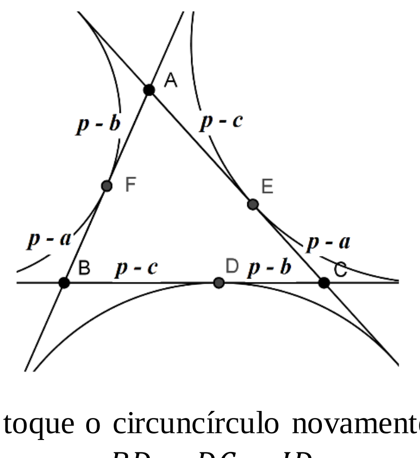
01. No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS.
02. Um círculo passando pelos vértices B e C de um triângulo ABC corta AB em P e AC em R. Se PR corta BC em Q, prove que $\frac{QC}{QB} = \frac{RC.AC}{PB.AB}$.
03. No quadrilátero $ABCD$, as retas AB e CD se cortam em P, enquanto as retas AD e BC se cortam em Q. As diagonais AC e BD cortam PQ em X e Y, respectivamente. Prove que $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YQ}$.
04. No triângulo ABC, os pontos L, M, N estão sobre BC, AC, AB, respectivamente, e AL, BM, CN são concorrentes no ponto P.
    (a) Encontre o valor numérico de $\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}$.
    (b) Encontre o valor numérico de $\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN}$.
05. Os segmentos congruentes AE e AF são tomados sobre os lados AB e AC, respectivamente, do triângulo ABC. A mediana AM intersecta EF em Q. Prove que $\frac{QE}{QF} = \frac{AC}{AB}$.

4. Bissetrizes e Seus Teoremas

Agora, vamos estudar o terceiro membro do nosso quarteto: as bissetrizes. Existem muitos fatos bem atraentes e interessantes sobre elas, que enunciaremos sem demonstração (fica como exercício para o leitor (sempre sobra para o leitor...).

- As bissetrizes interna e externa de um mesmo ângulo são perpendiculares.
- As bissetrizes internas dum triângulo ABC são concorrentes no incentro do triângulo ABC.
- As bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$ e a bissetriz interna de $\angle A$ são concorrentes no ex-incentro relativo a A.
- Se $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $2p = a + b + c$, e os círculos abaixo são o incírculo e os ex-incírculos, com seus respectivos pontos de tangência, temos as medidas dos segmentos nas figuras abaixo:



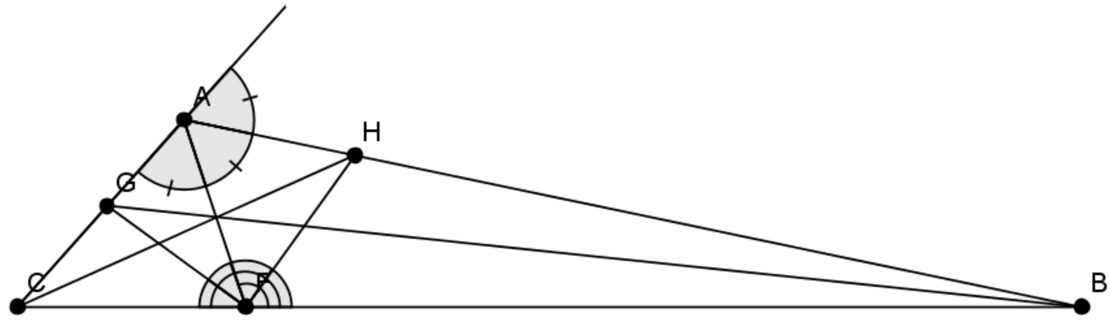


- Suponha que a bissetriz interna de $\angle A$ toque o circuncírculo novamente em D. Sendo I o incentro do triângulo ABC, temos que $BD = DC = ID$.

Somente esses fatos nos já dão uma riqueza de técnicas que nos permite resolver diversos problemas. Vejamos um exemplo:

Exemplo 4 (Leningrado): Sejam *AF*, *BG* e *CH* as bissetrizes de um triângulo *ABC* que tem ângulo *A* medindo 120°. Prove que o ângulo *GFH* mede 90°.

Solução:



Como $\angle A = 120°$ e *AF* é bissetriz, temos que os três ângulos destacados no vértice $\angle A$ são iguais a 60°. Agora, vamos procurar ex-incentros.

No triângulo *FAC*, *AH* é bissetriz externa e *CH* é bissetriz interna. Logo, pelo teorema 3, *FH* é bissetriz externa do triângulo *FAC*. Assim, $\angle AFH = \frac{1}{2}\angle AFB$ (1)

No triângulo *FAB*, *AG* é bissetriz externa e *BG* é bissetriz interna. Assim, temos que *FG* só pode ser bissetriz externa do triângulo *AFB*. Assim, $\angle AFG = \frac{1}{2}\angle AFC$ (2)

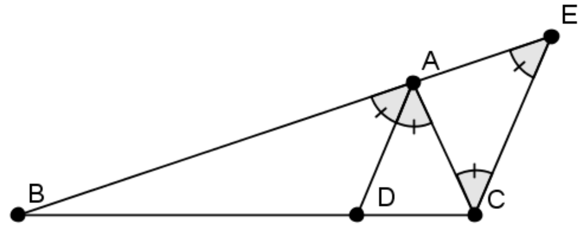
De (1) e (2) e usando que $\angle AFB + \angle AFC = 180°$, temos que $\angle GFH = \angle AFH + \angle AFG = 90°$, como queríamos provar ■

Agora, vejamos o nosso teorema principal sobre bissetrizes.

Teorema 3 (Teorema da Bissetriz Interna): Seja *D* o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle A$ de um triângulo *ABC*. Então:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Demonstração: Seja *EC* uma reta paralela a *AD*, como na figura abaixo.



Seja ainda $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$. Como $AD \parallel CE$, então $\angle ACE = \angle DAC = \alpha$ e $\angle AEC = \angle BAD = \alpha$, donde $\angle ACE = \angle AEC = \alpha$. Assim, o triângulo *ACE* é isósceles, e daí $AE = AC \quad (*)$

Agora, como $AD \parallel CE$, os triângulos *BAD* e *BEC* são semelhantes. Assim:

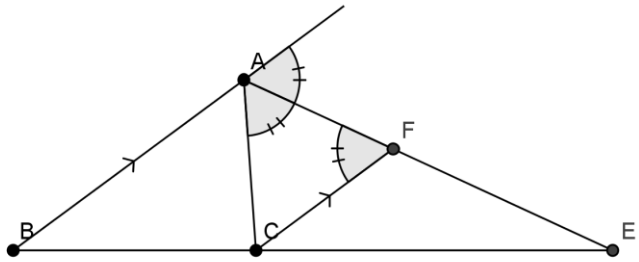
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

E o teorema 3 está provado ■

Teorema 3' (Teorema da Bissetriz Externa): Seja E o pé da bissetriz externa de $\angle A$. Então:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

Demonstração:



Na figura acima, $CF \parallel AB$. Assim, como *AE* é bissetriz externa de $\angle A$, temos que, pelo paralelismo, que os três ângulos destacados acima são iguais. Daí, o triângulo *ACF* é isósceles, com $AC = CF\ (*)$

No entanto, ainda pelo paralelismo, temos que os triângulos *EBA* e *ECF* são semelhantes. Assim:

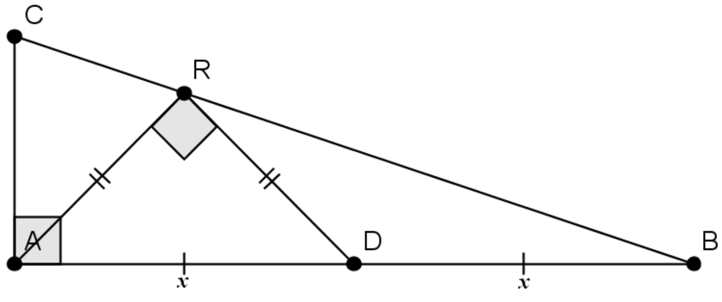
$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{CF} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

Como queríamos ■

O próximo exemplo mostra como bissetrizes são extremamente eficientes para o cálculo de áreas.

Exemplo 4 (Olimpíada de Maio/2000): Seja *ABC* um triângulo retângulo em *A* com cateto *AC* medindo 1. A bissetriz do ângulo $\angle BAC$ corta a hipotenusa em *R*; a perpendicular a *AR* traçada por *R* corta o lado *AB* em seu ponto médio. Encontre a medida do lado *AB*.

Solução:



Primeiro, como *AR* é bissetriz, então $\angle CAR = \angle RAB = 45°$, e assim o triângulo *ARD* é retângulo e isósceles. Então, se $x = AD = DB$, então $AR = RD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (Demonstre isso usando Pitágoras!). Agora, vamos calcular a área de *ARD* de duas formas:

A primeira é fácil: $Área(ARD) = \frac{AR.RD}{2} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}.\frac{x\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow Área(ARD) = \frac{x^2}{4}$ (1)

A segunda é mais legal! Veja só:

Sabemos que $\frac{Área(ARB)}{Área(ARC)} = \frac{RB}{RC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2x}{1} \Rightarrow \frac{Área(ARB)}{Área(ARC)+Área(ARB)} = \frac{2x}{2x+1} \Rightarrow \frac{Área(ARB)}{Área(ABC)} = \frac{2x}{2x+1} \Rightarrow \frac{Área(ARB)}{x} = \frac{2x}{2x+1} \Rightarrow Área(ARB) = \frac{2x^2}{2x+1}$ (2)

Note que usamos o teorema da bissetriz interna ($\frac{RB}{RC} = \frac{AB}{AC}$) e que a área de ABC é $\frac{AC.AB}{2} = \frac{(1)(2x)}{2} = x$.

Agora, olhando o triângulo *ARB*, temos que, de (2):

$$\frac{Área(ARD)}{Área(RDB)} = \frac{AD}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{Área(ARD)}{Área(RDB) + Área(ARD)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow Área(ARD)$$

$$= \frac{Área(ARB)}{2} = \frac{\frac{2x^2}{2x+1}}{2} \Rightarrow área(ARD) = \frac{x^2}{2x+1} \text{(3)}$$

Finalmente, de (1) e (3):

$$\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2x+1} \Rightarrow 2x = AB = 3$$

E portanto a resposta é 3 ■

Logo mais veremos como as bissetrizes se unem a Menelaus e Ceva para obtermos relações de grande valor, mas por enquanto vamos nos exercitar um pouquinho!

Exercícios

6. Seja *I* o incentro do triângulo *ABC*, as retas *AI*, *BI*, *CI* encontram o círculo circunscrito nos pontos A_1, B_1, C_1, respectivamente. Prove que AA_1 é perpendicular a BB_1.
7. Em um triângulo *ABC*, $\angle BAC = 100°$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz interna de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.
8. Seja *ABC* um triângulo retângulo em $\angle A$. D é o pé da altura relativa ao vértice *A*. I é o encontro do triângulo *ABD* e J é o incentro do triângulo *ACD*. A reta $\overleftrightarrow{IJ}$ intersecta *AB* em P e *AC* em Q. Prove que $AP = AQ$.
9. (Torneio das Cidades/1986) O triângulo ABC a altura relativa ao vértica A corta BC em H, e a bissetriz de ∠ABC corta AC em E Se $\angle BEA = 45°$, prove que $\angle EHC = 45°$.

5. Quádruplas Harmônicas

Agora, o quarto elemento do nosso quarteto vai entrar em ação: as *Quádruplas Harmônicas!* Mas afinal, o que é isso?

Definição: No plano euclidiano, se quatro pontos A, C, B e D estão sobre uma reta, nessa ordem, dizemos que A, C, B e D formam uma quádrupla harmônica se:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

Observe que um exemplo de quádrupla harmônica é obtido se considerarmos dois vértices e os pés das bissetrizes relativos ao vértice oposto (interna e externa). Isso ocorre porque, dado um triângulo ABC, e sendo D e D' os pés das bissetrizes interna e externa relativos ao vértice A, respectivamente, temos que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BD'}{CD'} = \frac{BA}{CA}$$

Agora, vamos provar um teorema que nos ajudará a obter muitas quádruplas harmônicas. Mais precisamente, dados três pontos A, C, B, nesta ordem numa reta, esse teorema nos mostrará como obter o ponto D nessa reta, de modo que A, C, B, D formem uma quádrupla harmônica.

Teorema 4 (Construção do conjugado harmônico usando apenas régua): Escolha um ponto E arbitrário, onde E não está em $\overleftrightarrow{ABC}$. Escolha outro ponto F sobre $\overleftrightarrow{AE}$, e seja $\{H\} = \overleftrightarrow{BF} \cap \overleftrightarrow{EC}$. Depois, trace $\overleftrightarrow{AH}$ e seja $\{G\} = \overleftrightarrow{AH} \cap \overleftrightarrow{EB}$. Trace ainda $\overleftrightarrow{GF}$. Então $\{D\} = \overleftrightarrow{FG} \cap \overleftrightarrow{AB}$ é o conjugado harmônico de C relativo a $\overleftrightarrow{AB}$.

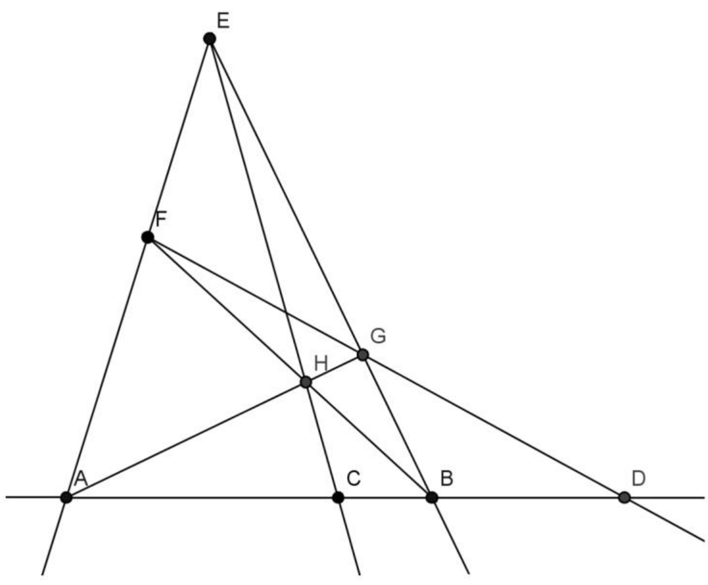
Demonstração: Embora a construção seja complicada a princípio, ao olharmos a figura abaixo, vemos que ela não é tão feia assim... Veja também que há muitas incidências, colinearidades e concorrências, o que indica que devemos usar os teoremas de Ceva e Menelaus para alcançar nosso objetivo. Vamos fazer isso agora!

Os pontos D, G e F são colineares. Logo, pelo Teorema de Menelaus no triângulo AEB, temos que:

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{AF}{EF} \cdot \frac{EG}{BG} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{AF}{EF} \cdot \frac{EG}{BG} = \frac{AD}{BD} \qquad (1)$$

Também, pelo Teorema de Ceva no triângulo AEB:

$$\frac{AF}{EF} \cdot \frac{EG}{BG} \cdot \frac{BC}{AC} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{AF}{EF} \cdot \frac{EG}{BG} = \frac{AC}{BC} \qquad (2)$$

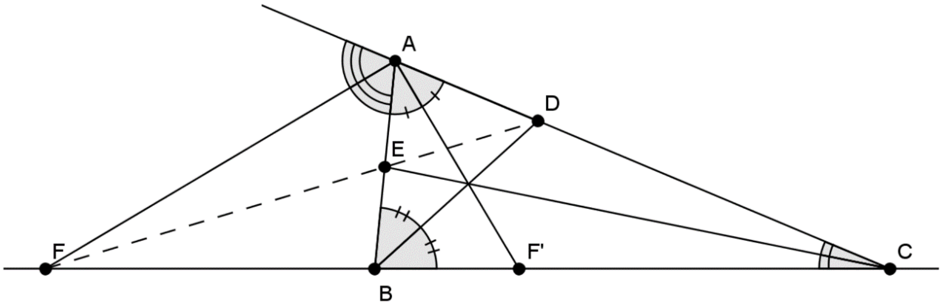


Combinando (1) e (2), temos $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, como queríamos provar ■

Esse teorema nos permite obter facilmente muitas colinearidades e concorrências: basta vermos que existe uma quádrupla harmônica em uma reta! Por exemplo...

Corolário: No triângulo ABC, as bissetrizes internas de $\angle B$ e $\angle C$ intersectam os lados AC e AB em D e E, respectivamente. A bissetriz externa de $\angle A$ intersecta BC em F. Então D, E, F são colineares.

Prova:



Seja F' o pé da bissetriz interna de $\angle A$. Já vimos que AF', BD, CE são concorrentes e que F, B, F', C formam uma quádrupla harmônica. Assim, pelo teorema 4, temos que D, E, F são colineares ■

Usaremos o corolário acima (obtido através da combinação do nosso quarteto harmônico) para acabar com um problema bem pesado. Não, não é o Doutor Destino, mas sim o problema 6 da OBM, que mesmo não sendo um vilão, deu muito trabalho aos heróis olímpicos do Nível 2 (apenas 19 pessoas fizeram 5 de 50 pontos nele, e ninguém conseguiu uma pontuação maior que essa).

Antes, porém, vamos nos aprofundar mais nas quádruplas harmônicas.

Exercícios

10. Seja ABC um triângulo e sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Seja W a intersecção da reta Y Z com o prolongamento do lado BC. Então B, X, C e W formam uma quádrupla harmônica se, e somente se, AX, BY e CZ são concorrentes.
11. (a) Seja A, C, B e D uma quádrupla harmônica. Seja O um ponto que não pertence à reta AB. Se uma paralela pelo ponto B à OA intersecta OC e OD em pontos P e Q então PB = PQ.
    (b) Sejam A, C, B e D quatros pontos colineares e seja O um ponto que não pertence à reta AB. Se a paralela à OA passando por B intersecta OC e OD em pontos P e Q, respectivamente, tais que PB = BQ então A, C, B e D formam uma quádrupla harmônica.
12. Seja A, C, B e D uma quádrupla harmônica e um ponto O que não pertence à reta AB. Sejam M, R, N e S as intersecções de OA, OC, OB e OD, respectivamente, com uma reta arbitrária. Então, M, R, N e S formam uma quádrupla harmônica.
13. (Circunferência de Apolônio) Sejam A e B dois pontos fixos e $k \neq 1$ é uma constante real positiva. Prove que o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem $AP/PB = k$ é uma circunferência conhecida como circunferência de Apolônio. (sugestão: construa pontos Q e R sobre AB de modo que $QP/PR = k$ e use o teorema das bissetrizes).

6. O Problema 6 da OBM 2015

Agora, nossas técnicas vão entrar em ação, e como um dos membros do quarteto diria: “Tá na hora do pau!!!” (que coisa do coisa, não? Rsrs)

O Problema 6 da OBM-2015: Seja *ABC* um triângulo escaleno e *AD*, *BE* e *CF* as bissetrizes internas, com *D* sobre *BC*, *E* sobre *AC* e *F* sobre *AB*. É dado que $\angle AFE = \angle ADC$. Calcule a medida do ângulo $\angle BCA$.

Solução: Seja D' a interseção de EF com BC. A primeira pergunta que fazemos é: Será que a posição de D' é como na figura 1 ou como na figura 2?

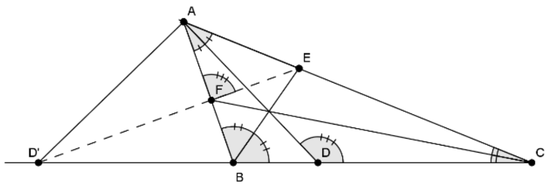


Figura 1

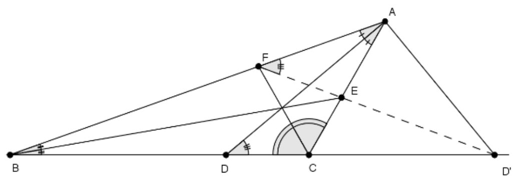
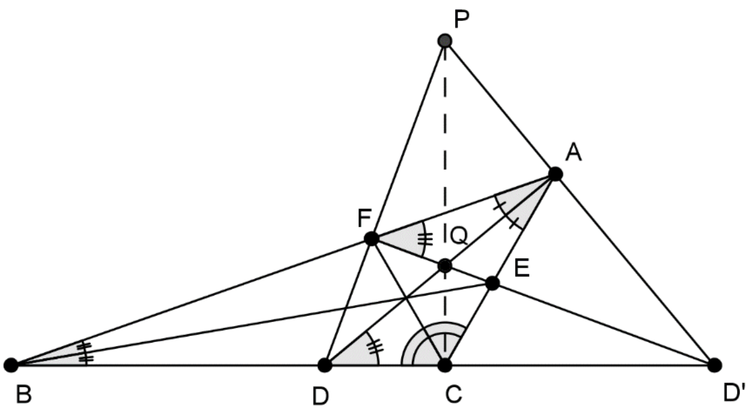


Figura 2

Vejamos porque a figura 1 é impossível. Para começar, observe que, por ângulo externo que $\angle ADC = \angle DAD' + \angle AD'D > \angle FAD' + \angle FD'A = \angle AFE$, donde $\angle ADC > \angle AFE$, o que é um absurdo. Portanto, devemos considerar a situação da figura 2.

A próxima figura é a mesma figura 2 com mais detalhes. Seja P a interseção entre DF e AD' e seja Q a interseção entre FD' e AD. Do corolário e do teorema 4, sabemos que B, D, C, D' formam uma quádrupla harmônica e que $\angle DAD' = 90°$.



Como $\angle AFE = \angle ADC \Rightarrow \angle AFD' = \angle ADD'$, donde $AFDD'$ é inscritível. Assim, temos que $\angle DFD' = \angle DAD' = 90°$, ou seja, $D'F$ e DA são alturas do triângulo PDD'. Em particular, Q é o ortocentro do triângulo PDD'.

Agora, usando o fato de que B, D, C, D' formam uma quádrupla harmônica, temos que, pelo exercício 10 (você já o fez?), $DA, D'F, PC$ são concorrentes, ou seja, P, Q, C são colineares. Assim, temos que PC é altura de PDD', já que Q é o ortocentro (aqui usamos um quinto elemento – ele é tipo um surfista prateado, só “tirando onda”...kkk). Dessa forma, temos que:

- $AFDD'$ é cíclico ($\angle DFD' = \angle DAD' = 90°$), logo $\angle FDA = \angle FD'A$;
- $FQCD$ é cíclico ($\angle QFD + \angle QCD = 90° + 90° = 180°$), logo $\angle FDQ = \angle FCQ$;
- $AQCD'$ é cíclico ($\angle QAD' + \angle QCD' = 90° + 90° = 180°$), $\Rightarrow \angle ACQ = \angle AD'Q$;

Das igualdades de ângulos, concluímos que $\alpha = \angle FCQ = \angle QCA \Rightarrow 2\alpha = \angle FCA$, e como CF é bissetriz do triângulo ABC, temos $2\alpha = \angle CFB$, e assim $3\alpha = \angle QCB = 90°$ (já que $PC \perp DD'$). Com isso, $\alpha = 30°$ e finalmente $\angle BCA = 4\alpha = 120°$ ■

Para finalizar, que tal usarmos nosso grande quarteto para resolver vários problemas, inclusive os problemas abaixo. Tenham todos uma fantástica diversão!

7. Problemas

1. (OBM/2001) As medidas dos ângulos do triângulo *ABC* são tais que $\angle A < \angle B < 90° < \angle C$. As bissetrizes externas dos ângulos $\angle A$ e $\angle C$ cortam os prolongamentos dos lados opostos *BC* e *AB* nos pontos *P* e *Q*, respectivamente. Sabendo que $AP = CQ = AC$, determine os ângulos de *ABC*.
2. As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo *ABC* cortam-se no ponto *I*. Sabe-se que *AI* = *BC* e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida de $A\hat{B}C$.
3. (OBM) No triângulo *ABC*, a medida do ângulo $\angle C$ é 60° e a bissetriz do ângulo $\angle B$ forma 70° com a altura relativa ao vértice *A*. Calcule os ângulos do triângulo *ABC*.
4. (Ibero-Americana/2002) Num triângulo escaleno *ABC* traça-se a bissetriz interna *BD*, com *D* sobre *AC*. Sejam *E* e *F*, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde *A* e *C* até à reta *BD*, e seja *M* o ponto sobre o lado *BC* tal que *DM* é perpendicular a *BC*. Demonstre que $\angle EMD = \angle DMF$.
5. (Polônia/2000) Seja I o incentro de um triângulo *ABC*, com $AB \neq AC$. As retas suportes dos segmentos *BI* e *CI* intersectam os lados *AC* e *AB* nos pontos *D* e *E*, respectivamente. Ache o ângulo $\angle BAC$, sabendo que $DI = EI$.
6. (Torneio das Cidades/1986) O triângulo ABC a altura relativa ao vértica A corta BC em H, e a bissetriz de $\angle$ABC corta AC em E Se $\angle \text{BEA} = 45°$, prove que $\angle \text{EHC} = 45°$.
7. Sejam *ABC* um triângulo, *M* o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle A$ e *N* o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle B$. Suponha que *MN* seja bissetriz do ângulo $\angle AMC$. Calcule a medida do ângulo $\angle A$.
8. (OBM/2005) A medida do angulo *B* de um triângulo *ABC* é 120°. Sejam *M* um ponto sobre o lado *AC* e *K* um ponto sobre o prolongamento do lado *AB*, tais que *BM* é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e *CK* é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento *MK* intersecta *BC* no ponto *P*. Prove que $\angle APM$ = 30°.
9. (IMO/2001) Num triângulo *ABC*, seja *AP* a bissetriz de $\angle BAC$ com *P* no lado *BC*, e seja *BQ* a bissetriz de $\angle ABC$ com *Q* no lado *CA*. Sabemos que $\angle BAC = 60°$ e que *AB* + *BP* = *AQ* + *QB*. Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo *ABC*?
10. Um círculo é tangente ao lado *BC* do triângulo *ABC* em *M*, seu ponto médio, e corta *AB* e *AC* nos pontos *R, R'* e *S, S'*, respectivamente. Se *RS* e *R'S'* são prolongados até cortar *BC* nos pontos *P* e *P'*, respectivamente, prove que $BP.BP' = CP.CP'$.
11. No triângulo *ABC*, *P, Q, R* são os pontos médios dos lados *AB, BC, CA*, respectivamente. As retas *AN, BL* e *CM* são concorrentes cortando os lados em *N, L, M*, respectivamente. Se *PL* corta *BC* em *J*, *MQ* corta *AC* em *I*, e *RN* corta *AB* em *H*, prove que *H, I, J* são colineares.
12. (Bielorússia/1995) Seja H o ponto de interseção das alturas BB_1 e CC_1 do triângulo acutângulo *ABC*. Seja l uma reta passando por *A*, tal que $l \perp AC$. Prove

que as retas BC, B_1C_1 e l possuem um ponto em comum se e somente se H for o ponto médio de BB_1.

13. (Coréia) Seja ABC um triângulo com $AB \neq AC$, seja V a intersecção da bissetriz do ângulo $\angle A$ com BC e seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Se E e F são as intersecções do círculo circunscrito ao triângulo AVD com CA e AB, respectivamente, mostre que AD, BE e CF são concorrentes.
14. Seja P um ponto no interior de um triângulo. As bissetrizes de $\angle BPC$, $\angle CPA$ e $\angle APB$ intersectam BC, CA e AB em X, Y e Z, respectivamente. Prove que AX, BY e CZ são concorrentes.
15. (IMO) As diagonais AC e CE de um hexágono regular $ABCDEF$ são divididas internamente pelos pontos M e N, respectivamente, na razão $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Determine r se B, M e N são colineares.
16. Seja ABC um triângulo e sejam E e D pontos sobre o lado BC tal que $CE = ED = DB$. Seja F o ponto médio de AC e G o ponto médio de AB. Seja H a intersecção de EG e FD. Determine o valor de $\frac{EH}{HG}$.
17. (Cone Sul) Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B. Seja P a intersecção da perpendicular traçada por O a AR. Sobre a reta OP se marca o ponto Q, de maneira que QP é a metade de PO e Q não pertence ao segmento OP. Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta AR em T. Chamamos de H o ponto de intersecção das retas AQ e OT. Provar que H, R e B são colineares.
18. Seja ABC um triângulo e sejam D o pé da bissetriz relativa ao vértice A, I o incentro e I_a o ex-incentro oposto ao vértice A. Prove que A, I, D e I_a formam uma quádrupla harmônica.
19. Em um triângulo não equilátero, a reta que passa pelo baricentro e pelo incentro é paralela a um dos lados do triângulo. Demonstre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.
20. (Shortlist IMO) Seja ABC um triângulo, e sejam D, E, F os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo ABC com os lados BC, CA e AB respectivamente. Seja X um ponto no interior do triângulo ABC tal que o círculo inscrito no triângulo XBC tangencia XB, XC e BC em Z, Y e D, respectivamente. Prove que $EFZY$ é inscritível.
21. (TST Jr Balkan - Romênia) Seja ABC um triângulo retângulo com $\angle A = 90°$ e D um ponto sobre o lado BC. Sejam E o simétrico de A com relação a BD e F o ponto de intersecção de CE com a perpendicular a BC por D. Prove que AF, DE e BC são concorrentes.
22. (Recíproca do Problema 6 da OBM) Seja ABC um triângulo escaleno e AD, BE e CF as bissetrizes internas, com D sobre BC, E sobre AC e F sobre AB. É dado que $\angle BCA = 120°$. Prove que $\angle AFE = \angle ADC$.