Álgebra para iniciantes

Semana Olímpica/2015

Prof. Armando

31 de janeiro de 2015

---

1 Introdução

O objetivo inicial desse material é mostrar algumas aplicações de técnicas simples de álgebra. Algumas dicas iniciais para resolver as questões a seguir são:

- Seja organizado. Procure sempre organizar as ideias de forma que você possa ver todos resultados parciais obtidos;
- Busque utilizar todos os dados da questão. Só é possível concluir uma solução se todos os dados são usados;
- Use apenas a quantidade de variáveis necessárias. Por exemplo, se x e y são números consecutivos, você não precisa de y, pois x e $(x+1)$ são suficientes para escrever as mesmas equações e, além disso, expressões com x e $(x+1)$ são mais fáceis de solucionar do que as mesmas expressões com x e y;
- Treine bastante. Assim, você tem mais chances de associar uma nova questão com alguma que você já resolveu.

Esse material contém questões que estão divididas em duas seções:

1. alguns tipos de questões de álgebra;
2. questões que envolvem como o número é formado por seus dígitos.

A ideia é mostrar a aplicação de algumas das dicas acima na primeira parte do material e mostrar uma forma de como funciona a última dica na segunda parte do material. Sem mais bla bla blá, vamos ao que interessa!

2 Questões

2.1 Alguns tipos de questões de álgebra

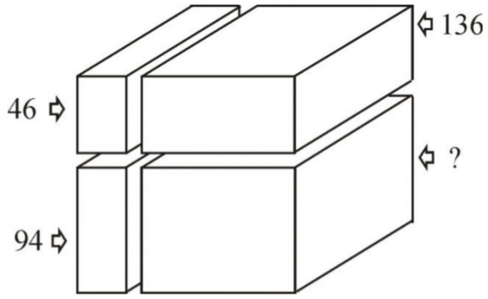
Primeiramente, vejamos alguns tipos de questões de álgebra:

Problema 1 *(Alemanha/2002)* O planeta Ypsilon tem um calendário similar ao nosso: um ano possui 365 dias e cada mês possui $28, 30$ ou 31 dias. Prove que, no planeta Ypsilon, um ano tem 12 meses.

Problema 2 *(Rioplatense/2000 - Nível A)* Um professor de matemática aplicou uma prova com 4 questões de marcar, valendo 1 ponto cada questão. Uma questão é considerada certa apenas quando somente o item correto é marcado. Depois da correção, o professor observou que o número de estudantes que obteve 3 pontos foi igual ao número de estudantes que obteve 2 pontos. Além disso, ele percebeu que todos fizeram, no mínimo, um ponto. Por último, ele percebeu que a quantidade de pontos obtidos por todos os alunos é igual ao número de estudantes mais 30. Encontre o número de estudantes que conseguiram, pelo menos, 3 pontos.

Problema 3 *(OBM/2010 - 3ª fase - N1)* Beto serrou um cubo de madeira de aresta 7 cm em quatro blocos retangulares por meio de cortes paralelos às faces, conforme indicado na figura. Os números da figura indicam, em cm^2, a área total da superfície de três desses blocos.

a) Qual era a área total da superfície do cubo antes de ser serrado?
b) Qual é a área total da superfície do quarto bloco retangular?



Problema 4 *(Rioplatense/2010 - Nível A)* Sofia escreveu um número natural. A soma de todos os números naturais menores que o número que Sofia escreveu é igual a um número com três digítos iguais. Determine quais números Sofia pode ter escrito.

Problema 5 *(Seletiva Fortaleza - Rioplatense/2013 - Nível A)* Renato pensou em cinco números inteiros e ordenou eles em forma crescente: $a < b < c < d < e$. Ele calculou todas as possíveis somas entre quaisquer dois deles, isto é, $(a + b)$, $(a + c)$,$\cdot\cdot\cdot$, $(d + e)$. Dessas 10 somas, sabe-se que as três menores são 31, 33 e 36 e que as duas maiores são 47 e 51. Determine os cinco números que Renato pensou.

Problema 6 *(Seletiva Fortaleza - Rioplatense/2014 - Nível A)* Em um torneio de futebol, cada time enfrenta cada um dos outros times exatamente uma vez. Em cada partida, o vencedor recebe 2 pontos, o perdedor recebe 0 pontos e em caso de empate cada time recebe 1 ponto. Sabe-se que, ao final do torneio, o primeiro lugar obteve 7 pontos, o segundo lugar 5 pontos e o terceiro lugar 3 pontos.

a) Quantos times haviam no torneio?
b) quantos pontos fez cada um deles?

Problema 7 *(Cone Sul/2013)* Sobre uma reta marcamos quatro pontos distintos. Para cada ponto marcado é calculada a soma das distâncias deste ponto aos outros três, obtendo assim quatro valores.
Decidir se é possível que os quatro valores sejam, em alguma ordem:

a) 29, 29, 35, 37
b) 28, 29, 35, 37
c) 28, 34, 34, 37

2.2 Questões que envolvem como o número é formado por seus dígitos

A seção a seguir mostra algumas questões que abordam a forma como o número é formado por seus dígitos:

Problema 8 *(Rioplatense/2002 - Nível A)* Encontre todos os números de 2 dígitos que são múltiplos da soma de seus dígitos.

Problema 9 *(Itália/2002)* Encontre todos os números inteiros de 3 dígitos que são iguais a 34 vezes a soma de seus dígitos.

Problema 10 *(Rioplantense/2004 - Nível A)* Utilizando todos os dígitos de 1 a 9, Sofia escreveu três números de três dígitos cada. Ao somar esses três números, ela obteve o 1665. Em cada um dos números, ela trocou o algarismo da centena pelo algarismo das unidades. Qual é a soma desses novos três números?

Problema 11 *(Seletiva - Rioplatense/2012 - Nível A)* Um número natural de três algarismos não-nulos N é dito radical se ele apresenta a seguinte propriedade: Sendo a, b e c os três algarismos de N, então é válido que $\sqrt[a]{b} = c$ (note que a, b, c não precisam estar nessa ordem no número). Calcule a quantidade de números radicais existentes.

Problema 12 *(Seletiva - Rioplatense/2013 - Nível A)* Encontre todos os números da forma $20xy12z$ que são divisíveis por 792, sendo x, y e z algarismos.

Problema 13 *(Maio/2012 - Nível 2)* Um número de quatro algarismos é *gago* se tem os dois primeiros algarismos iguais entre si e os dois últimos algarismos iguais entre si. Por exemplo, 3311 e 2222 são números gagos. Encontre todos os números gagos de quatro algarismos que são quadrados perfeitos.

Problema 14 *(Maio/2001 - Nível 1)* Sara escreveu no quadro negro um número inteiro de menos de trinta algarismos e que termina em 2. Célia apaga o 2 do fim e escreve-o no início. O número que fica é igual ao dobro do número que tinha escrito Sara. Qual é o número que Sara escreveu?