Análise – Nível U
Prof. Rodrigo Villard – Rio de Janeiro
Colégio Ponto de Ensino

1-Teorema de Stone-Weierstrass

"Considere uma função $f:[a,b]\to\Re$ contínua. Dado $\varepsilon>0$, existe um polinômio P tal que $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$, para todo $x\in[a,b]$".

2-Teorema de Baire

"Toda união enumerável de conjuntos abertos densos em $\Re$ é aberto e denso em $\Re$" ou de forma equivalente "Toda interseção enumerável de conjuntos fechados de interior vazio em $\Re$ possui interior vazio em $\Re$".

Exercícios

1) Seja $f:[0,1]\to\Re$ uma função contínua. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$.
2) (IMC) Seja $g:[0,1]\to\Re$ uma função contínua e seja $f_n:[0,1]\to\Re$ uma seqüência de funções definidas por $f_0(x)=g(x)$ e $f_{n+1}(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt$ $(x\in(0,1], n=0,1,2,\ldots)$.
   Determine $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $(x\in(0,1], n=0,1,2,\ldots)$.
3) Prove ou disprove: O conjunto dos racionais pode ser escrito como interseção enumerável de conjuntos abertos em $\Re$.
4) (IMC) Seja *A* um conjunto fechado de $\Re^n$ e *B* o conjunto de todos os pontos $b\in\Re^n$ para os quais existe exatamente um ponto $a_0\in A$ tal que $|a_0-b|=\inf\limits_{a\in A}|a-b|$.
5) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Suponha que $g(x)=f(x,y)$ seja contínua para todo *y* e que $h(y)=f(x,y)$ seja contínua para todo *x*. Prove que se *f* leva compactos em compactos, então *f* é contínua.

Exercícios de Cálculo

1) Seja f uma função real contínua não-negativa definida em [0,1], tal que $(f(t))^2\le 1+2\int_0^t f(s)ds$, para todo $t\in[0,1]$. Mostre que $f(t)\le 1+t$, para $t\in[0,1]$.
2) Seja *f*(*x*) uma função definida para $x\ge 1$, satisfazendo *f*(1)=1 e $f'(x)=\frac{1}{x^2+(f(x))^2}$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ existe e é menor que $1+\frac{\pi}{4}$.
3) (IMC)Existe uma função continuamente diferenciável $f:\Re\to\Re$ tal que para todo x real se tem *f*(*x*)>0 e *f'*(x)=*f*(*f*(*x*)) ?
4) (IMC) Seja $f:[a,b]\to[a,b]$ uma função contínua e seja $p\in[a,b]$. Defina $p_0=p$ e $p_{n+1}=f(p_n)$, para $n=0,1,2,\ldots$ Suponha que o conjunto $T_p=\{p_n : n=0,1,2,\ldots\}$ é fechado,

isto é, se $x \notin T_p$ então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x' \in T_p$ se tem $|x' - x| \geq \delta$. Mostre que T_p possui um número finitos de elementos.

5) Para $a > b > 0$, calcule $\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x(e^{ax}+1)(e^{bx}+1)}\, dx$.