Áreas de Figuras Planas e o Teorema de Ceva

Nível 1

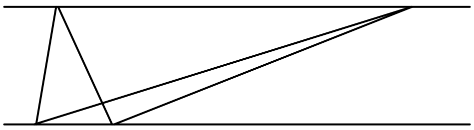
Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

Introdução

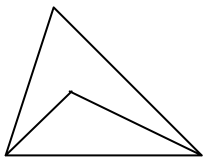
Veremos a seguir alguns resultados básicos relacionando áreas de figuras planas. Nosso objetivo será o Teorema de Ceva demonstrado utilizando áreas de triângulos.

Baseados na fórmula $\frac{bh}{2}$ para área de triângulo, temos os seguintes fatos:

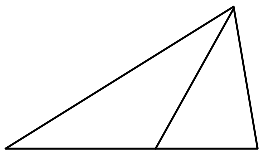
1. Triângulos que possuem bases e alturas relativas a essas bases respectivamente com medidas iguais têm mesma área.



2. Triângulos que possuem apenas bases com medidas iguais têm áreas proporcionais às alturas relativas a essas bases.



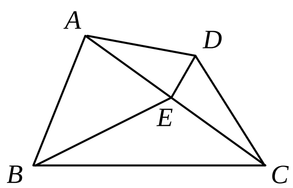
3. Triângulos que possuem alturas com medidas iguais têm áreas proporcionais às bases relativas a essas alturas.



Passemos agora a alguns exemplos.

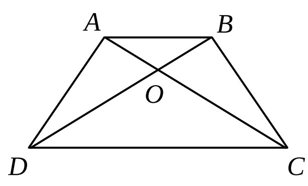
Exemplos

EXEMPLO 1: *Dado o quadrilátero convexo ABCD e o ponto médio E da diagonal AC, calcular a área de ABED em função da área de ABCD.*



Como BE e DE são medianas dos triângulos ABC e ADC, respectivamente, elas dividem as áreas desses triângulos em duas partes de mesma área. Assim, o quadrilátero ABED, sendo formado pelas metades ABE e ADE dos triângulos ABC e ADC, que juntos formam o quadrilátero ABCD, tem metade da área de ABCD.

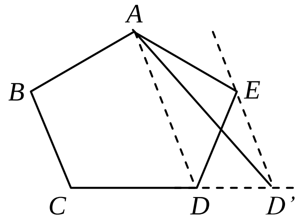
EXEMPLO 2: *Seja ABCD um trapézio de bases AB e CD. As diagonais se intersectam no ponto O. As áreas dos triângulos ADO e BCO são iguais.*



Perceba que os triângulos ADC e BCD têm mesma área, já que possuem mesma base DC e alturas congruentes (as distâncias de A e B ao lado DC). Agora, retire de ambos o triângulo DOC comum a ambos. Dessa forma, restam os triângulos ADO e BCO com áreas iguais.

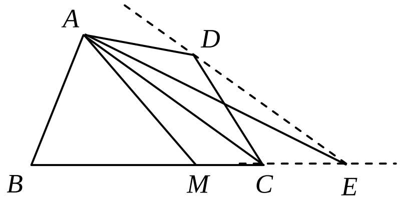
EXEMPLO 3: *Dado o polígono convexo ABCDE, achar um quadrilátero ABCD' que tenha a mesma área.*

Trace por E uma paralela à diagonal AD. Em seguida, ligue A a D' (interseção de CD com a paralela traçada). Assim, os triângulos ADE e ADD' têm áreas iguais (veja item 1 da introdução). Como o quadrilátero ABCD não sofreu alteração, ABCDE e ABCD' têm áreas equivalentes, como queríamos.



EXEMPLO 4: *Dado o quadrilátero convexo ABCD, traçar por um vértice uma reta que o divida em duas partes de mesma área.*

Analogamente ao exemplo anterior, ABE e ABCD têm mesma área. Trace em seguida a mediana AM do triângulo ABE que o divide em dois pedaços de áreas congruentes. Portanto, essa é também a reta que divide ABCD em duas partes de mesma área.



EXEMPLO 5: *As medianas dividem os lados opostos em duas partes iguais. Além disso, elas são concorrentes e dividem o triângulo em seis pedaços menores de mesma área (equivalente a 1/6 de sua área).*

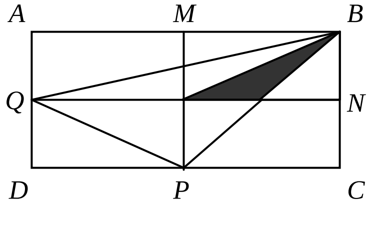
EXEMPLO 6: *Sejam AA', BB', CC' cevianas concorrentes num ponto O. Assim,* $\frac{BA'}{A'C} = \frac{[ABO]}{[ACO]}$ *(Método K). Conclua que* $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B}$ *=1 (Teorema de Ceva). (Obs: a volta desse resultado também ocorre, ou seja, se* $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B}$ *=1, então as cevianas AA', BB', CC' são concorrentes).*

Problemas Propostos

01. Se *E* e *F* são os pontos médios dos lados *AB* e *BC* do quadrilátero convexo *ABCD* de área 1, calcular a área de *EBFD*.

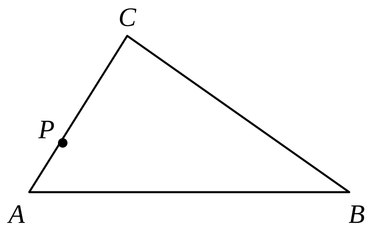
02. Dado o retângulo *ABCD* de área 1 e os pontos médios *E* e *F* dos lados *BC* e *CD*, respectivamente, achar a área do triângulo *AEF*.

03. (*Olimpíada de Maio/1997*) No retângulo *ABCD*, *M*, *N*, *P*, *Q* são os pontos médios dos lados. Se a área do triângulo sombreado é 1, calcular a área do retângulo *ABCD*.



04. Seja *ABCD* um trapézio de bases *AB* e *CD*. As diagonais se intersectam no ponto *O*. Sabendo que a área de *OCD* mede 2 e que a área de *OCB* mede 8, calcule a área do trapézio *ABCD*.

05. Pelo ponto P sobre o lado AC do triângulo ABC, traçar uma reta que o divida em duas figuras de áreas iguais.



06. Considere o triângulo ABC de área 1. Sejam D, E, F pontos sobre a reta suporte do lado AB (A, D, E, F, B nesta ordem) tais que $AD = DE = EF = FB$. Sejam G e H pontos sobre a reta suporte do lado BC (B, G, H, C nesta ordem) tais que $BG = GH = HC$. Calcule a área do triângulo BDG.

07. Sejam D, H, I pontos no interior dos lados AB, BC, CA do triângulo ABC de área 1 tais que $BD = 3AD$, $BH = 2HC$ e $CI = IA$. Calcule a área do triângulo DHI.

08. Sejam D, E, F pontos no interior dos lados AB, BC, CA do triângulo ABC tais que $BD = 3AD$, $6BE = 10EC$ e $5CI = IA$. Mostre que AD, BE e CF são concorrentes.

09. Mostre que as medianas de um triângulo qualquer são concorrentes.

10. Mostre que as bissetrizes internas de um triângulo qualquer são concorrentes.

Bibliografia

- Araujo, José, *Area y Volumen*, Red Olímpica, Buenos Aires, 2000