Problemas com a Balança? Deixe-me ajudar! Versão leve

A comunidade matemática diverte várias gerações com pequenos quebra-cabeças envolvendo balanças de dois pratos.

1. Alguns exercícios resolvidos

Vamos começar com o mais fácil:

Exemplo 1.1.

Você têm três moedas, e sabe que uma delas é mais leve do que as demais. As outras duas têm o mesmo peso. Determine a moeda mais leve com uma pesagem em uma balança de dois pratos.

Resolução

Basta colocar duas moedas quaisquer na balança (uma em cada prato, é claro!). Se a balança pender para um dos lados, a moeda mais leve está no lado mais leve; se a balança se equilibrar, a moeda leve é a que não foi pesada.

Exemplo 1.2.

Você tem nove moedas, e sabe que uma delas é mais leve do que as demais. As outras oito têm o mesmo peso. Determine a moeda mais leve com duas pesagens em uma balança de dois pratos.

Resolução

Divida as moedas em três grupos de três moedas cada. Com uma pesagem é possível determinar o grupo mais leve, reduzindo o problema a encontrar a moeda mais leve de três com uma pesagem. Já vimos como fazer isso.

Você já deve estar imaginando que com n pesagens é possível determinar a moeda leve entre 3^n moedas (tente provar isso!). E se tivesse mais moedas?

Exemplo 1.3.

Você tem 82 moedas, e sabe que uma delas é mais leve do que as demais. As outras 81 têm o mesmo peso. É possível determinar a moeda mais leve com quatro pesagens em uma balança de dois pratos?

Resolução

Não é possível. Como cada pesagem tem três resultados possíveis (pender para cada um dos lados ou se equilibrar), há $3^4 = 81$ possíveis resultados para 4 pesagens. Isso quer dizer que, entre as 82 possibilidades de moeda mais leve, duas têm o mesmo resultado, e não dá para identificar qual moeda a partir desse resultado.

Além disso, e se você não soubesse se a moeda é mais leve ou pesada?

Exemplo 1.4.

Você tem 12 moedas, e sabe que uma é falsa e tem peso diferente das demais, mas não sabe se é mais leve ou mais pesada. Mostre como determinar a moeda falsa e se ela é mais leve ou mais pesada com três pesagens.

Resolução

Numere as moedas de 1 a 12. Note que, em princípio temos 24 resultados: a moeda i é falsa, e é mais leve ou a moeda i é falsa, e é mais pesada, para cada i de 1 a 12. A ideia é eliminar o máximo de resultados com cada pesagem. Como cada pesagem tem três resultados, ela pode eliminar $\frac{2}{3}$ dos resultados. Ou seja, vamos tentar reduzir os possíveis resultados para $\frac{24}{3} = 8$ com uma pesagem.

Nada mais natural do que colocar 8 moedas na balança: comece pesando as moedas 1, 2, 3, 4 de um lado e 5, 6, 7, 8 do outro. Se a balança acusar que, digamos, 1, 2, 3, 4 são mais pesados, então os possíveis resultados são agora: 1, 2, 3 ou 4 é a moeda falsa, e ela é a mais pesada ou 5, 6, 7, 8 é a moeda falsa, e ela é a mais leve (e se a balança acusar que 1, 2, 3 e 4 são mais leves, o resultado é análogo). Se a balança se equilibrar, 9, 10, 11 ou 12 é a moeda falsa, e ela pode ser mais pesada ou mais leve. Em qualquer caso, sobram 8 possibilidades após a primeira pesagem.

Agora temos que fazer uma pesagem que diminua as possibilidades para no máximo 3. Vamos resolver o problema nos dois casos. Suponha que a balança não se equilibrou e suponha que estamos somente com os seguintes resultados: 1, 2, 3 ou 4 é a moeda falsa, e ela é a mais pesada ou 5, 6, 7, 8 é a moeda falsa, e ela é a mais leve. Note que, nesse caso, as moedas 9, 10, 11, 12 são moedas verdadeiras.

Chamemos de grupo A as moedas 1, 2, 3, 4 e de grupo B as moedas 5, 6, 7, 8. O truque aqui é deixar três das moedas de um grupo de fora e três moedas do outro grupo dentro. Só que não podemos deixar quatro moedas dos grupos A e B de fora, porque se a balança se equilibrar os resultados se reduzem a 4 (uma das quatro moedas de fora é a falsa), e não dá para resolver o problema. Então, deixemos, digamos, 5, 6, 7 e 9 de fora e vamos organizar 1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 12. Não vale a pena manter 1, 2, 3, 4 na balança. Então vamos pesar 1, 2, 3, 8 de um lado e 4, 10, 11, 12 no outro. Se 1, 2, 3, 8 for mais pesado, então a moeda falsa é 1, 2 ou 3 e ela é mais pesada (lembre que se 4 fosse falsa, seria mais pesada), e podemos encontrar a moeda falsa com uma pesagem. Se 4, 10, 11, 12 é mais pesado, então ou 8 é a moeda falsa e ela é mais leve ou 4 é a moeda falsa e ela é mais pesada. Aí é só comparar, digamos, 8 com uma moeda verdadeira qualquer para ver se 8 é falsa ou não. Se a balança se equilibrar, todas as moedas pesadas são verdadeiras; então a moeda falsa é 5, 6 ou 7, e sabemos que é mais leve, e podemos resolver isso com uma pesagem também.

Agora suponha que os pratos se equilibraram na primeira pesagem. Então a moeda falsa é 9, 10, 11 ou 12, e ela pode ser mais leve ou mais pesada. Nesse caso, coloque 9, 10, 11 de um lado e as moedas verdadeiras 1, 2, 3 do outro. Se a balança pender para algum dos lados, vai indicar que 9, 10 ou 11 é a moeda falsa e também se ela é mais leve ou mais pesada; se a balança se equilibrar, a moeda falsa é 12, e mais uma pesagem indicará se ela é mais leve ou mais pesada.

2. Exercícios

Todas as pesagens são em balanças de dois pratos, exceto quando indicado.

01. Você tem disponíveis 20 cestos com moedas, e sabe o peso de cada moeda. Um dos cestos contém somente moedas 1 grama mais leves, mas você não sabe qual é. As moedas têm a mesma aparência e todas as moedas em um mesmo cesto têm o mesmo peso. Como você pode descobrir qual é o cesto com moedas mais leves com uma pesagem em uma balança eletrônica?

02. Há seis bolas com o mesmo tamanho, de três cores – duas bolas de cada cor, uma mais leve, outra mais pesada. Todas as bolas leves têm o mesmo peso, e todas as bolas pesadas têm o mesmo peso. Descubra quais são as bolas leves com duas pesagens.

03. Há 2011 moedas, sendo que quatro são falsas. As moedas verdadeiras têm o mesmo peso e as moedas falsas têm o mesmo peso, porém menor. É possível determinar uma moeda verdadeira com apenas duas pesagens?

04. São dadas 1999 moedas, todas com pesos distintos. Uma máquina pode efetuar a seguinte operação: dadas três moedas, determinar qual é a moeda do meio em termos de peso (e nada mais). Mostre que só é possível descobrir qual é a milésima moeda em peso com essa máquina, e é possível fazê-lo com no máximo um milhão de operações.

05. Nos anos 40 o seguinte problema atraiu a atenção de muitos matemáticos, principalmente na Inglaterra e nos Estados Unidos:

São dadas $m \geq 3$ moedas aparentemente idênticas. Todas as moedas, com exceção de uma, têm a mesma massa e não sabemos se esta moeda é mais leve ou mais pesada que as demais. Qual é o número mínimo de pesagens necessárias para determinar a moeda e dizer se ela é mais leve ou mais pesada que as outras, usando apenas uma balança de dois pratos?

Em 1946, Freeman Dyson (que mais tarde se tornaria um dos maiores expoentes da Física Teórica) criou um método que em n pesagens determina a moeda falsa dentre um total de até $m = \frac{3^n - 3}{2}$ moedas, $n \geq 3$. Uma característica fascinante do método é que a escolha das moedas para cada uma das pesagens independe das demais pesagens.

Vamos descrever a seguir o método de Dyson no caso particular no qual temos 12 moedas.

Moeda	"Marcador esquerdo"	"Marcador direito"
1	211	011
2	100	122
3	022	200
4	212	010
5	101	121
6	020	202
7	210	012
8	102	120
9	021	201
10	221	001
11	110	112
12	002	220

(Observe que a soma dos marcadores é sempre 222.)

Considere a tabela acima; $M(i;0)$, $M(i;1)$ e $M(i;2)$ denotam os conjuntos de moedas para os quais o i-ésimo ($i = 1,2,3$) dígito do marcador direito correspondente é igual a 0, 1 e 2, respectivamente. Por exemplo, $M(3;1)$ é o conjunto das moedas cujo terceiro dígito do marcador direito é 1, ou seja, $M(3;1) = \{1;5;9;10\}$.

(a) Determine $M(1;2)$ e $M(2;1)$. (Atenção! Esses conjuntos são diferentes.)

São feitas 3 pesagens. Na i-ésima pesagem ($i = 1,2,3$) todas as moedas do conjunto $M(i;0)$ são colocadas no prato esquerdo e todas as moedas de $M(i;2)$, no prato direito.

(b) Qual é a terceira pesagem? Indique as moedas que ficam no prato esquerdo e as que ficam no prato direito.

O resultado ℓ_i da i-ésima pesagem é representado pelo dígito 0 se o prato da esquerda é o mais pesado; 1 se os pratos se equilibram; e 2 se o prato da direita é o mais pesado. A partir dos dígitos ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 formamos o marcador $\ell = \ell_1\ell_2\ell_3$.

(c) Prove que ℓ é um marcador da moeda falsa F, sendo que se ℓ é um marcador direito, F é mais pesada que as outras e se ℓ é um marcador esquerdo, F é mais leve.

(d) Como você generalizaria o problema para n pesagens?

06. Dispomos de nove moedas. Todas têm a mesma massa, exceto uma que é mais leve. Além disso, dispomos de três balanças de dois pratos, mas uma está defeituosa e dá resultados aleatórios, e não sabemos qual é a balança defeituosa.

Mostre como determinar a moeda mais leve com três pesagens.

07. Temos dez moedas. Cada uma pode ter dois pesos diferentes. É possível determinar, com três pesagens em uma balança de dois pratos, se todas as moedas têm o mesmo peso?

08. Temos N moedas que parecem ser idênticas, mas uma delas é falsa. As moedas verdadeiras têm o mesmo peso e a moeda falsa pesa mais ou menos do que as moedas verdadeiras, mas não sabemos. Aqui não estamos interessados em descobrir a moeda falsa, mas sim em saber se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada. Determine todos os valores de N para os quais é possível fazê-lo com duas pesagens.

09. Temos 2009 bolinhas, algumas brancas e outras, pretas. Todas as bolinhas deveriam ter o mesmo peso, as brancas mais leves do que as pretas. Todavia, sabe-se que há exatamente uma bolinha com a cor errada, ou seja, tem o peso da bolinha da outra cor. Prove que é possível identificá-la com 7 pesagens em uma balança de dois pratos.