# Bhaskara e sua turma

Cícero Thiago B. Magalhães

## 1 Equações de Segundo Grau

Uma equação do segundo grau é uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que $a$, $b$ e $c$ são números reais dados, com $a \neq 0$. Dada uma equação do segundo grau como acima, denotamos por $\Delta$ o número real

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

e o denominamos o discriminate da equação. Nossa missão, é tentar calcular, quando existirem, as raízes reais de uma equação do segundo grau. Para isto, considere o seguinte trinômio:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento de $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$. Completando o quadrado, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

A última forma apresentada é chamada de forma canônica. Podemos agora calcular, caso existam, as raízes reais de uma equação do segundo grau. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula leva o nome de *Fórmula de Bhaskara*, em homenagem ao matemático hindu Bhaskara que viveu no século XII.

Dependendo do discriminante $\Delta$, as raízes podem ser ou não números reais. Em seguida, as três possíveis possibilidades:

(1) $\Delta$ é um número real positivo ($\Delta > 0$)

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real e existem dois valores reais diferentes para as raízes da equação.

(2) $\Delta$ é zero ($\Delta = 0$)

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ também é zero. Observamos, então, a existência de um único valor real para as raízes desta equação. Opa! Mas uma equação do segundo grau tem duas raízes!!

Podemos dizer, então, que uma equação do segundo grau com $\Delta = 0$ tem duas raízes reais e iguais!

(3) $\Delta$ é um número negativo ($\Delta < 0$)

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real. Dizemos, então, que não há valores reais para as raízes da equação.

Podemos agora facilmente determinar a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau arbitrária. Sejam $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$.

$$(1)\ \alpha+\beta = \frac{-b}{a}$$

$$(2)\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

**Exemplo 1.1**
$a,\ b,\ c,\ d$ são números reais distintos tais que $a$ e $b$ são as raízes da equação $x^2-3cx-8d=0$, e $c$ e $d$ são as raízes da equação $x^2-3ax-8b=0$. Calcule a soma $a+b+c+d$. (OBM)

**Solução**

É fácil perceber que $a+b=3c$ e que $c+d=3a$. Somando e subtraindo membro a membro as duas igualdades obteremos $b+d=2\,(a+c)$ e $b-d=4\,(c-a)$. Como $a$ é raiz de $x^2-3cx-8d=0$, segue que

$$a^2-3ac-8d=0\ (1).$$

Do mesmo modo, como $c$ é raiz de $x^2-3ax-8b=0$, temos que

$$c^2-3ac-8d=0\ (2).$$

Subtraindo as igualdades (1) e (2) e utilizando as relações anteriormente obtidas, vem:
$a^2-c^2=8(d-b) \Rightarrow (a-c)(a+c)=8\times 4(a-c)$. Como $a-c\neq 0$, concluímos que $a+c=32$.
Portanto, $a+c=32$ e $b+d=2(a+c)=64$, donde $a+b+c+d=96$.

**Exemplo 1.2**
Sejam $a,\ b,\ c,\ a\neq 0$, tais que $a$ e $4a+3b+2c$ têm o mesmo sinal. Mostre que a equação $ax^2+bx+c=0$ não pode ter duas raízes no intervalo $(1,2)$. (Romênia)

**Solução**

Temos que

$$0 \leq \frac{4a+3b+c}{a} = 4+3\frac{b}{a}+2\frac{c}{a} = 2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4 = (x_1-1)(x_2-2)+(x_1-2)(x_2-1).$$

Se $x_1$ e $x_2$ pertencerem ao intervalo $(1,2)$, então cada termo da soma acima será estritamente negativo, o que é uma contradição.

**Exercícios**

1. Seja $a$ um número inteiro positivo ímpar. Determine $a$ de modo que a equação $x^2-ax+4a=0$ tenha as duas raízes inteiras.

2. Seja $b$ um real não nulo de modo que a equação do segundo grau $x^2+b^2x+\sqrt{\pi}=0$ tenha raízes reais $x_1$ e $x_2$. Se $x_1\sqrt{\pi}=x_2(bx_2-\sqrt{\pi})$, prove que o número $b$ é negativo.

3. Demonstre que, se para todo $n$ inteiro não nulo, existe $x\in\mathbb{Z}$ tal que $n|x^2+bx+c$ $(b,\ c\in\mathbb{Z})$, então $x^2+bx+c=0$ tem raízes inteiras. (Teste de seleção do Brasil para a Cone Sul)

4. Mostre que se $a,\ b,\ c$ são inteiros ímpares, a equação $ax^2+bx+c=0$ não tem raiz racional.

5. Resolver (numericamente!) a equação

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2=x,$$

sabendo que admite uma raíz inteira.

6. Acha uma condição necessária e suficiente para que a equação $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$, tenha uma raíz o quadrado da outra.

7. Resolver a equação

$$\left\lfloor \frac{2x^2}{x^2+1} \right\rfloor = x,$$

sendo $\lfloor a \rfloor$, a parte inteira do número $a$.

8. Seja $a$ um número real dado. Calcular os números reais $x_1,\dots,x_n$ que são soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1^2 & + & ax_1 & + & \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 & = & x_2 \\ x_2^2 & + & ax_2 & + & \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 & = & x_3 \\ \vdots & & & & & & \\ x_{n-1}^2 & + & ax_{n-1} & + & \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 & = & x_n \\ x_n^2 & + & ax_n & + & \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 & = & x_1 \end{cases}$$

(Torneio das Cidades)

9. Se $x^2+ax+b=0$ e $x^2+px+q=0$. Ache uma condição pra que as duas equações tenham uma raíz comum.

10. Achar os números reais positivos $x,y$ sabendo que as quatro médias

$$a=\frac{x+y}{2},\ g=\sqrt{xy},\ h=\frac{2xy}{x+y},\ k=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

são números naturais cuja soma vale 66.

11. Seja $\dfrac{3}{4}<a<1$. Prove que a equação

$$x^3(x+1)=(x+a)(2x+a)$$

tem quatro soluções reais distintas e ache estas soluções de forma explícita. (Coréia)

**Sugestão**
Resolva uma equação do segundo grau em $a$!

12. Paladino escreve a equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ com coeficientes inteiros positivos $a,\ b,\ c$. Antonio pode trocar um, dois, ou nenhum dos sinais $+$ por $-$. Se as duas raízes da equação (modificada) forem inteiras, paladino vence, enquanto se não houver raízes reais ou se pelo menos uma delas não for inteira, Antonio vencerá. Pode Paladino escolher os coeficientes iniciais de modo que ele sempre vença? (Torneio das Cidades)

13. Se a equação

$$ax^2+(c+b)x+(e+d)=0$$

tem raízes reais maiores que 1, mostre que a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

tem pelo menos uma raiz real. (Grécia)

14. As raízes de $x^2 + ax + 1 = b$ são inteiros positivos. Prove que o inteiro $a^2 + b^2$ é composto.

15. Sejam $a,\ b,\ c$, números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ têm exatamente uma raiz real em comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também têm exatamente uma raiz real em comum. Determine a soma $a + b + c$. (Teste de seleção do Brasil para a Cone Sul)

## 2 Funções Quadráticas

Na teoria das funções, àquelas que satisfazem $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$ com $a,\ b$ e $c$ reais e $a \neq 0$ são chamadas *funções quadráticas.*

Normalmente, quando estudamos funções, é bastante interessante construir o gráfico das mesmas. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola, porém a demonstração requer conhecimentos de geometria analítica e isto podemos deixar para um futuro próximo!

Usaremos bastante a forma canônica estudada na primeira parte do nosso curso a partir deste momento.

Seja $a > 0$. A forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de $x$ e é sempre $\geq 0$. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

é igual a zero, ou seja, quando $x = \dfrac{-b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Se $a < 0$, então $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$ é o valor máximo atingido por $f(x)$. O ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

Vamos tentar descobrir para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$. Para isto precisamos estudar o comportamento do discriminante $\Delta$.
(1) $\Delta < 0$

Usando mais uma vez a forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right] \Rightarrow a \cdot f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isto significa que

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(2) $\Delta = 0$

Usando a forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{0}{4a^2} \right) \right] = a^2 \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \Rightarrow a \cdot f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isto significa que

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(3) $\Delta > 0$

Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes desta função. Fica como exercício provar que o sinal de $f(x)$ se comporta da seguinte maneira:

(i) $f(x)$ tem o mesmo sinal de $a$ para todo $x$, tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$;
(ii) $f(x)$ tem o mesmo sinal de $-a$ para todo $x$, tal que $x_1 < x < x_2$.

**Exemplo 2.1**
Seja $f(x) = a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2$, com $a$, $b$ e $c \in \mathbb{Q}_+^*$. Prove que se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 0$, então $n$ é um quadrado perfeito.

**Solução**

As raízes da função são

$$\frac{b^2 - 2ac \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2};$$

para que alguma delas seja inteira, deve existir um inteiro $k$ tal que $b^2 - 4ac = k^2$. Então temos que:

$$b^2 - k^2 = 4ac \Rightarrow \frac{b^2 - k^2}{2} = 2ac$$

e substituindo na expressão das raízes da equação obtemos

$$\frac{b^2 - \frac{b^2 - k^2}{2} \pm bk}{2a^2} = \frac{b^2 + k^2 \pm 2bk}{4a^2} = \left( \frac{b \pm k}{2a} \right)^2,$$

que é um quadrado.

**Exemplo 2.2**
Sejam $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ números reais não todos nulos então a seguinte desigualdade ocorre:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

A igualdade ocorre somente se

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

**(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**

**Prova**

Nós podemos escrever

$$(xa_1 + b_1)^2 + (xa_2 + b_2)^2 + \ldots + (xa_n + b_n)^2 =$$

$$(x^2a_1^2 + 2xa_1b_1 + b_1^2) + \ldots + (x^2a_n^2 + 2xa_nb_n + b_n^2) =$$

$$Ax^2 + 2Bx + C,$$

em que

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$

$$B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

$$C = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2.$$

O lado esquerdo da equação acima é, uma soma de quadrados, não - negativo para todo $x$; em particular para $x = -\frac{B}{A}$. Substituindo este valor em $x$ na equação temos:

$$A\frac{B^2}{A^2} - 2B\frac{B}{A} + C = \frac{AC - B^2}{A} \geq 0.$$

Como $A > 0$ então $AC - B^2 \geq 0$. E a desigualdade está provada! A igualdade só é possível se

$$xa_1 + b_1 = xa_2 + b_2 = \ldots = xa_n + b_n,$$

que é o mesmo que,

$$\frac{b_1}{a_1} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}(= -x)$$

**Exercícios**

1. Considere a função quadrática $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$. Seja $S$ a área do triângulo em que dois dos vértices são os pontos de interseção de $f(x)$ com o eixo das abcissas, enquanto que o terceiro vértice é o vértice da parábola. Achar todos os racionais $p$ tais que $S$ é inteiro. (Bulgária)

2. Os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazem as condições $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ e $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. prove que existem $i$ e $j$ tais que $x_ix_j \leq \frac{-1}{n}$.

3. Seja $f(x) = x^2 + 6ax - a$ em que $a$ é um parâmetro real.
(a) Ache todos os valores de $a$ para que a equação $f(x) = 0$ tenha pelo menos uma raiz real.
(b) Se $x_1$ e $x_2$ são as raízes reais de $f(x) = 0$ (não necessariamente distintas). Ache o menor valor da expressão

$$A = \frac{9a - 4a^2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} - \frac{70a^3 + 1}{(1 - 6a - x_1)(1 - 6a - x_2)}.$$

(Bulgária)

4. Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$, quaisquer que sejam os reais $x$ e $y$. (OBM)

5. Ache todos os $a$, se a expressão

$$(a + 1)x^2 - 2(a - 1)x + 3a - 3$$

é não - negativa para todo $x$ real. (Lituânia)

6. As seguintes operações são permitidas com a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: a) trocar $a$ e $c$; b) trocar $x$ por $x + t$, onde $t$ é um número real. Repetindo estas transformações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

7. Prove que uma das raízes da equação quadrática

$$2000x^2 - (4001 + 0.1^2)x + 2001 = 0$$

é menor que 1 e a outra é maior que 1.