A Configuração
Brocard

Nível 3
Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

O Teorema de Miguel

Se um ponto é marcado sobre cada lado de um triângulo $A_1A_2A_3$ e por cada vértice do triângulo e pelos pontos marcados sobre os lados adjacentes um círculo é desenhado, esses três círculos se cortam em um ponto (Ponto de Miguel).

A seguir vejamos alguns resultados para prosseguir com a teoria.

TEOREMA A: *As retas do Ponto de Miguel aos pontos marcados formam ângulos iguais com os respectivos lados.*

TEOREMA B: *Reciprocamente, se P é um ponto fixo no plano do triângulo $A_1A_2A_3$, então é possível determinar de infinitas maneiras um triângulo de Miguel para P.*

TEOREMA C: *Todos os triângulos de Miguel de um ponto P são semelhantes.*

Algumas Definições e Teoremas Iniciais

Definição 1: a reta passando por um vértice do triângulo, paralela ao lado oposto é chamada *ex-mediana*. O ponto de interseção de duas ex-medianas é chamado *ponto ex-mediano*.

Definição 2: *Simediana* é a isogonal da mediana.

Definição 3: As tangentes pelos vértices do triângulo ao circuncírculo são chamadas *ex-simedianas.*

TEOREMA D: *Por cada ponto ex-mediano passa uma mediana do vértice oposto. As perpendiculares de um ponto sobre uma ex-mediana aos lados adjacentes são inversamente proporcionais aos lados e as perpendiculares de um ponto ex-mediano sobre os três lados são inversamente proporcionais aos comprimentos desses lados. Uma mediana divide o lado oposto na razão –1, enquanto uma ex-mediana divide na razão +1. Uma mediana é dividida pelo baricentro na razão –1/2 e por um ponto ex-mediano na razão +1/2. Os triângulos cujas bases são os lados do triângulo dado e cujo vértice é um dos pontos ex-medianos têm áreas iguais.*

TEOREMA E: *Uma reta passando por um vértice do triângulo e tangente ao circuncírculo é isogonal à reta paralela ao lado oposto do triângulo (ex-mediana). A partir de um ponto sobre a tangente, as perpendiculares aos lados do ângulo são proporcionais aos comprimentos desses lados.*

A Configuração Brocard

OS PONTOS BROCARD: *Em qualquer triângulo $A_1A_2A_3$, existe um e somente um ponto P tal que $\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \angle PA_3A_1 = \omega$ e um ponto P' tal que $\angle P'A_2A_1 = \angle P'A_3A_2 = \angle P'A_1A_3 = \omega'$. Esses dois pontos são chamados pontos Brocard do triângulo.*

Se um ponto P existe, considere o ΔA_1A_2P; como $\angle PA_2A_3 = \angle PA_1A_2$ inscrito no arco $\frown PA_2$, segue que A_2A_3 é tangente ao círculo. Em outras palavras, o ponto P é comum aos três dados círculos, cada um tangente a um lado do triângulo em um vértice e passando por um segundo vértice.

Denotando por c_1 o círculo tangente a A_1A_2 em A_1 e passando por A_3, etc, os círculos c_1, c_2, c_3 são, portanto, concorrentes (caso particular do Teorema de Miguel). O ponto de interseção está necessariamente no interior do dado triângulo e o ponto P completamente determinado.

Analogamente, P' é a interseção dos três círculos c_1', c_2', c_3', onde c_1' toca A_1A_3 em A_1 e passando por A_2.

PROBLEMA 1: Construir cada ponto Brocard de um dado triângulo.

TEOREMA 1: $cotg\ \omega = cotg\ \omega' = cotg\ \alpha_1 + cotg\ \alpha_2 + cotg\ \alpha_3$.

COROLÁRIO: Os Pontos Brocard são conjugados isogonais.

TEOREMA 2: $cotg\ \omega = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4S}$.

PROBLEMA 2: Construir um triângulo, dado um lado, um ângulo adjacente e o ângulo Brocard.

TEOREMA 3: *Se dois triângulos têm o mesmo ângulo Brocard e um ângulo de um deles igual a um ângulo do outro, então eles são semelhantes.*

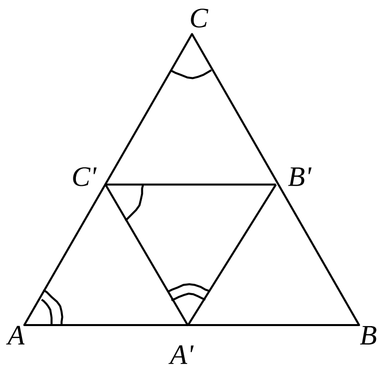
TEOREMA 4: *As distâncias do ponto simediano K aos lados opostos do triângulo são* $KK_1 = \dfrac{a_1 tg\omega}{2}$*, etc. pois*

TEOREMA 5: *As perpendiculares aos lados do triângulo a partir do ponto simediano são proporcionais aos comprimentos dos lados.*

TEOREMA 6: *Um raio Brocard, uma mediana e uma simediana são concorrentes. Mais claramente,* A_1P*,* A_2K *e* A_3M *se cortam em um ponto; analogamente,* A_1P'*,* A_2M *e* A_3K *cortam-se no isogonal do ponto anterior.*

TEOREMA 7: *Os triângulos pedais de P e P' são semelhantes ao triângulo* $A_1A_2A_3$ *dado.*

PROBLEMA 3 (*OBM 1999*): Dado triângulo *ABC* mostre como construir com régua e compasso um triângulo *A'B'C'* de área mínima com $C' \in AC$, $A' \in AB$ e $B' \in BC$ tal que $\angle B'A'C' = \angle BAC$ e $\angle A'C'B' = \angle ACB$.



Bibliografia

- Johnson, Roger A., *Advanced Euclidean Geometry, An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 1960