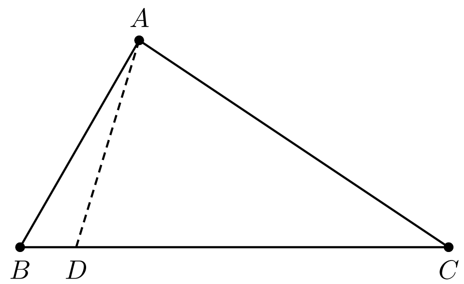
Caminhos mínimos e desigualdades envolvendo elementos geométricos

Cícero Thiago

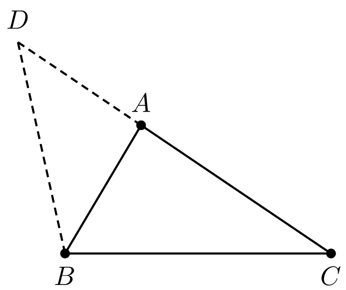
1. Proposição
Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.
Demonstração



Suponhamos $BC > AC$. Seja D o ponto sobre o lado BC tal que $AC = CD$. Então o triângulo ADC é isósceles de base AD e, com isso, $\angle CAD = \angle CDA$. Pelo Teorema do ângulo externo, $\angle CDA > \angle ABC$, mas $\angle CAD = \angle CDA$, então $\angle CAD > \angle ABC$. Por outro lado, $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$, então é fácil concluir, que $\angle BAC > \angle ABC$.

Exercício
1. Prove que se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes, e o maior lado é oposto ao maior ângulo.

2. Desigualdade Triangular
A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.



Seja D o ponto sobre o prolongamento do lado AC tal que $AD = AB$. Então o triângulo BAD é isósceles de base BD e, com isso, $\angle BDA = \angle DBA$. Além disso, $CD = DA + AC$. É fácil ver que $\angle DBC > \angle DBA = \angle BDA$. Então, pelo exercício anterior, $DC > BC$, mas $DC = DA + AC = AB + AC$. Portanto, $BC < AB + AC$.

Consequência da desigualdade triangular
Sejam $A, P_1, P_2, \ldots, P_n$ e B pontos do plano, então

$$AP_1 + P_1P_2 + \ldots + P_nB \geq AB.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os pontos $A, P_1, P_2, \ldots, P_n$ e B são colineares e aparecem nessa ordem.

Exercícios Resolvidos
1. Dados n pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e um círculo unitário, prove que é possível encontrar um ponto M sobre o círculo tal que $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n \geq n$.
Solução:
Sejam M_1 e M_2 pontos diametralmente opostos no círculo. Então $M_1A_k + M_2A_k \geq M_1M_2 = 2$. Adicionando essas desigualdades para $k = 1, 2, \ldots, n$ temos

$$(M_1A_1 + \ldots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \ldots + M_2A_n) \geq 2n.$$

Portanto, $M_1A_1 + \ldots + M_1A_n \geq n$ assim, basta fazer, $M = M_1$ ou $M_2A_1 + \ldots + M_2A_n \geq n$, fazendo $M = M_2$.

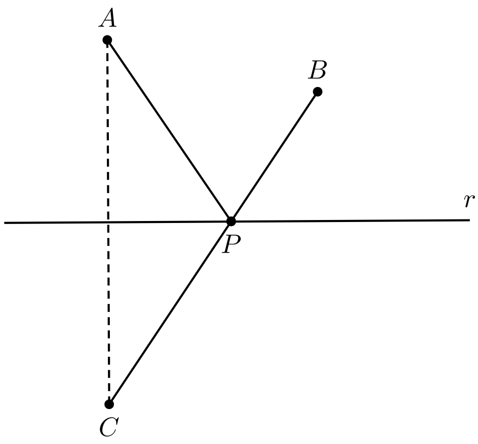
2. Prove que a média aritmética dos comprimentos dos lados de um polígono convexo arbitrário é menor que a média aritmética dos comprimentos de todas as diagonais.
Solução:
Sejam A_pA_{p+1} e A_qA_{q+1} dois lados não adjacentes de um n-ágono convexo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (i.e., $|p - q| \geq 2$). Então

$$A_pA_{p+1} + A_qA_{q+1} < A_pA_q + A_{p+1}A_{q+1}.$$

Vamos escrever todas as desigualdades e, em seguida, somá - las. Para cada lado existem precisamente $n - 3$ lados não adjacentes a ele e, portanto, cada lado aparece em $n - 3$ desigualdades, i.e, no lado esquerdo da desigualdade obteremos a soma $(n - 3)p$, onde p representa a soma dos comprimentos de todos os lados do n-ágono. Cada diagonal aparece em duas desigualdades portanto, o lado direito da desigualdade será $2d$, onde d representa a soma dos comprimentos de todas as diagonais do n-ágono. Assim, $(n - 3)p < 2d \iff \dfrac{p}{n} < \dfrac{d}{\frac{n(n-3)}{2}}$.

3. A idéia do menor caminho

► Dados dois pontos A e B de um mesmo lado de uma reta r, determinar o ponto P sobre r de forma que $PA + PB$ seja mínimo.
Solução:

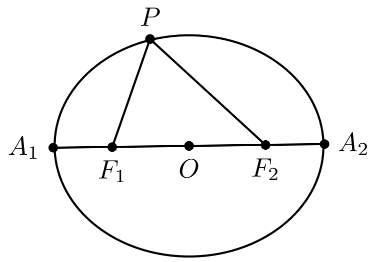


Para acharmos o ponto P que minimiza $PA + PB$ basta tomar o simétrico de A, que chamaremos de C, com relação à reta r e em seguida ligarmos o ponto C ao ponto B. A nossa construção garante que $PA = PC$, então, a menor distância entre C e B será uma reta que liga os dois. A interseção desta reta com a reta r será o nosso ponto P.

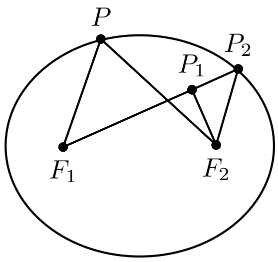
4. Definição

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles.
Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante $2a$ (sendo $2a > 2c$), ou seja,

$$Elipse = \{P \in \alpha | PF_1 + PF_2 = 2a\} .$$

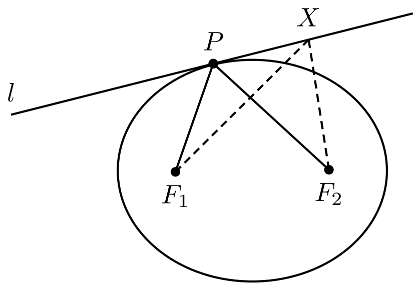


Dado um ponto P_1 no interior de uma elipse, então $P_1F_1 + P_1F_2 < 2a$.



Com efeito, $2a = F_1P_2 + P_2F_2 = F_1P_1 + P_1P_2 + P_2F_2 > P_1F_1 + P_1F_2$. Prove agora que se P_3 for um ponto externo à elipse então $P_3F_1 + P_3F_2 > 2a$.

5. Teorema
Seja l uma reta tangente a uma elipse no ponto P. Então l é a bissetriz externa do ângulo F_1PF_2 (Figura abaixo).



Prova:

Seja X um ponto da reta l diferente de P. Como X está no exterior de uma elipse, então $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$, isto é, de todos os pontos de l, P é o ponto que minimiza a soma das distâncias a F_1 e F_2. Isto mostra que os ângulos que PF_1 e PF_2 faz com l são iguais.

Exercícios

1. (Rússia) Sejam AB e CD segmentos de comprimento 1. Se eles se intersectam em O e, $\angle AOC = 60^o$, prove que $AC + BD \geq 1$.

2. (China) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle BAD = \angle BCD = 90^o$. Sabendo que a bissetriz do ângulo $\angle BAD$ é paralela a BC, perpendicular a CD e intersecta BD em E, prove que $AE < \frac{1}{2}CD$.

3. (Colômbia) Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD, e $AB \geq CD$. Prove que

$$AD + BC > AB - CD \geq BC - AD$$

   e determine todos os possíveis casos de igualdade.

4. (Eslováquia) Seja $ABCD$ um tetraedro com

$$\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = \angle ABC + \angle CBD + \angle DBA = 180^o.$$

   Prove que $CD \geq AB$.

5. (USAMO) Um tetraedro $ABCD$ é isósceles, isto é, $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Prove que as faces do tetraedro são triângulos acutângulos.

6. (Teorema de Steiner) Se duas bissetrizes de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.

7. (Problema de Fagnano) Determine o triângulo de perímetro mínimo inscrito em um triângulo acutângulo.

8. (Ponto de Fermat) Seja ABC um triângulo acutângulo. Encontrar o ponto interior que minimiza a soma $AP + BP + CP$.

9. Em um quadrilátero convexo qual é o ponto que minimiza a soma das distâncias aos vértices? Qual é a solução se o quadrilátero não é convexo?

10. (Maio) Considere uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero e cujas outras faces são triângulos isósceles e retângulos, no vértice A. Uma formiga parte do vértice B e chega em um ponto P da aresta CD, em seguida, partindo de P chega a um ponto Q a aresta AC e retorna ao ponto B. Sabendo que o caminho percorrido foi mínimo, determine a medida do ângulo $\angle PQA$.

11. (Baltic Way) Seja ABC um triângulo com $\angle A = 120^o$. Sejam K e L pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente. Sejam BKP e CLQ triângulos equiláteros construídos no exterior do triângulo. Prove que $PQ \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$.

12. (Baltic Way) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja N o ponto médio de BC. Se $\angle AND = 135^o$, prove que $AB + CD + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot BC \geq AD$.

13. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle BAD = 30^o$ e $AC = BC + CD + BD$. Prove que $\angle BCD = 120^o$.

14. (Seletiva Cone Sul do Peru) $AMBCND$ um hexágono tal que $\angle AMB = \angle CND = 90^o$ e o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. Prove que $BC + AD \geq MN$.

15. Seja ABC um triângulo acutângulo e R o raio de sua circunferência circunscrita. Prove que $AB + BC + CA > 4R$.

16. (Shortlist IMO) Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Prove que

$$min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC.$$

17. Seja ABC um triângulo isósceles de base AC tal que $\angle B = 20^o$. Prove que:
a) $AB < 3AC$.
b) $AB > 2AC$.

18. Entre todos os quadriláteros $ABCD$ com $AB = 3$, $CD = 2$ e $\angle AMB = 120^o$, onde M é o ponto médio de CD, ache aquele que possui o perímetro mínimo.

19. Considere um triângulo com base fixa BC tal que o vértice V está sobre uma reta r paralela a BC. Seja Q a interseção da mediatriz de BC e a reta r. Prove que quanto mais próximo de Q estiver o vértice V então maior será a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo VBC.

20. (Ibero) Demonstre que entre todos os triângulos cujos vértices distam 3, 5 e 7 de um ponto P dado, o que tem maior perímetro admite P como incentro.

21. (IMO) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com $AB = BC = CD$ e $DE = EF = FA$, tal que $\angle BCD = \angle EFA = \dfrac{\pi}{3}$. Sejam G e H os pontos no interior do hexágono tais que $\angle AGB = \angle DHE = \dfrac{2\pi}{3}$. Prove que

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Bibliografia

1. Advanced Euclidean Geometry; Alfred S. Posamentier.

2. Geometry of Conics; A. V. Akopyan e A. A. Zaslavsky.

3. Geometric inequalities; Nicholas D. Kazarinoff.

4. Olimpiada Nacional Escolar de Matemática VII; Jorge Tipe Villanueva, Claudio Espiniza Choqquepura e John Cuya Barrios.

5. Geometric Problems on Maxima and Minima; Titu Andreescu, Oleg Mushkarov e Luchezar Stoyanov.

6. Inequalities; Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega e Rogelio Valdez Delgado.

7. When less is more: Visualizing basic inequalities; Claudi Alsina e Roger B. Nelsen.

8. Problems in plane and solid geometry, v.1, Plane Geometry; Viktor Prasolov.