O TEOREMA DE CASEY

Uma generalização do teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis

Prof.: Onofre Campos
onofrecampos@c7s.com.br

Antes de mais nada, vamos enunciar o teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis, para posteriormente apresentarmos uma generalização do mesmo.

Teorema: (Ptolomeu) Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo inscritível em uma circunferência, então o produto dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Em outras palavras,

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.$$

Reciprocamente, se um quadrilátero $ABCD$ satisfaz a igualdade acima, então o quadrilátero é inscritível.

Teorema: (Casey) Considere a circunferência Γ de raio R e quatro pontos, A, B, C e D sobre Γ, dispostos nesta ordem no sentido anti-horário. Sejam K_A, K_B, K_C e K_D circunferências arbitrárias tangentes internamente a Γ nos pontos A, B, C e D, respectivamente. Se t_{XY} denota o comprimento da tangente externa comum às circunferências K_X e K_Y, então

$$t_{AC}.t_{BD} = t_{AB}.t_{CD} + t_{AD}.t_{BC}.$$

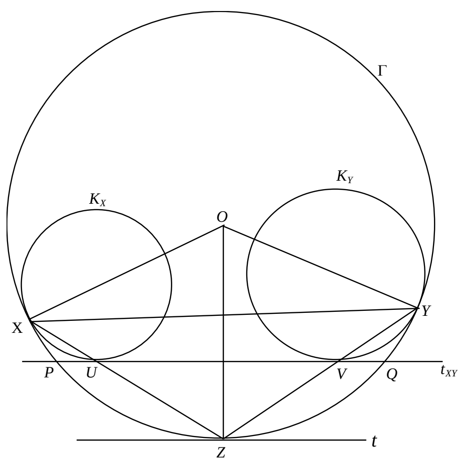
Demonstração:

Considere inicialmente dois pontos X e Y sobre Γ, e sejam U e V os pontos de tangência de t_{XY} com K_X e K_Y, respectivamente. Em primeiro lugar, vamos mostrar dois lemas, que são fundamentais para esta demonstração.

Lema 1: Para quaisquer dois pontos X e Y sobre Γ, as retas XU e YV concorrem em um ponto Z sobre Γ.

Prova do Lema 1:

Sejam R, r_x e r_y os raios das circunferências Γ, K_X e K_Y, respectivamente. Considere as homotetias de centros X e Y e razões $\dfrac{R}{r_x}$ e $\dfrac{R}{r_y}$, respectivamente, que transformam a reta t_{XY} em uma reta t paralela a t_{XY} e tangente a Γ. As imagens de U e V por estas homotetias coincidirão com o ponto médio Z do arco PQ, onde $\{P, Q\} \equiv t_{XY} \cap \Gamma$, o que significa dizer que XU e YV concorrem em Z.



Lema 2: Se R, r_x e r_y são os raios das circunferências Γ, K_X e K_Y, respectivamente, então

$$t_{XY} = \frac{\overline{XY} \cdot \sqrt{(R - r_x)(R - r_y)}}{R}$$

Prova do Lema 2:

Seja O o centro de Γ (figura acima). Observe que $OZ \perp t$.

Se $\angle OZY = \alpha$, então $\angle ZOY = 180° - 2\alpha$ e $\angle ZXY = \angle ZOY/2 = 90° - \alpha$. Como $OZ \perp t$, segue que $\angle ZVU = 90° - \alpha$.

Assim, concluímos que $\Delta XYZ \sim \Delta VUZ$, de modo que

$$\frac{XY}{VU} = \frac{XZ}{VZ} = \frac{YZ}{UZ} = \frac{XY}{t_{XY}} \Rightarrow \left(\frac{XY}{t_{XY}}\right)^2 = \frac{XZ \cdot YZ}{VZ \cdot UZ} \quad (*)$$

Mas, a homotetia de centro X e razão $\frac{R}{r_x}$ transforma U em Z, tal que $\frac{R}{r_x} = \frac{XZ}{XU} \Rightarrow \frac{XZ}{UZ} = \frac{R}{R - r_x}$. Analogamente, obtemos $\frac{YZ}{VZ} = \frac{R}{R - r_y}$, de modo que em (*) ficamos com

$$\left(\frac{XY}{t_{XY}}\right)^2 = \frac{R^2}{(R - r_x)(R - r_y)} \Rightarrow t_{XY} = \frac{XY \cdot \sqrt{(R - r_x)(R - r_y)}}{R},$$

e o lema 2 está provado.

Passemos à demonstração do teorema. Usando o último lema provado e utilizando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, é imediato que

$$\begin{aligned}
t_{AC} \cdot t_{BD} &= \frac{AC \cdot BD \cdot \sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2} \\
&= \frac{(AB \cdot CD + AD \cdot BC) \cdot \sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2} \\
&= \frac{AB \cdot CD \cdot \sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2} \\
&\quad + \frac{AD \cdot BC \cdot \sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2} \\
&= t_{AB} \cdot t_{CD} + t_{AD} \cdot t_{BC}.
\end{aligned}$$

O teorema de Ptolomeu passa a ser um caso particular do teorema de Casey se considerarmos os raios das circunferências K_A, K_B, K_C e K_D todos nulos. Neste caso, obteremos $t_{AC} = AC$, $t_{BD} = BD$, ...

Aplicações do Teorema

1. (OBM Jr. – 1996) Seja *ABC* um triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência Γ_1; Γ_2 é uma circunferência tangente ao lado *BC* e ao menor arco *BC* de Γ_1. Uma reta através de *A* tangencia Γ_2 em *P*. Prove que $AP = BC$.

2. (IMO – 1993 / Banco de Problemas) Considere um triângulo *ABC*, de incentro *I*, e cujo círculo circunscrito denota-se por Γ_1; Γ_2 é uma circunferência tangente aos lados *CA* e *CB* nos pontos *D* e *E*, respectivamente, e ao arco *AB* de Γ_1. Prove que *I* é o ponto médio do segmento *DE*.

3. *ABC* é um triângulo com incentro *I* e cujo círculo circunscrito é Γ_1. *D* é um ponto arbitrário sobre o lado *BC*. Γ_2 é uma circunferência tangente aos segmentos *AD* e *DC*, em *E* e *F*, respectivamente, e ao arco *AC* de Γ_1. Prove que *E*, *F* e *I* são colineares.

4. É dada uma semicircunferência com diâmetro *AB* e centro *O*. Uma reta perpendicular a *AB* pelo ponto $E \in OB$ intercepta a semicircunferência no ponto *D*. Uma circunferência, que é tangente a *DE* e *EB* nos pontos *K* e *C*, respectivamente, é tangente ao arco *AB* no ponto *F*. Prove que $m(E\hat{D}C) = m(B\hat{D}C)$.

5. (IMO – 2000 / Banco de Problemas) Sejam *D*, *E* e *F* pontos sobre os lados *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente, do triângulo *ABC* tais que o triângulo *DEF* seja eqüilátero. Uma circunferência (α) tangencia a circunferência circunscrita ao triângulo *DEF*, externamente, e os segmentos *CD* e *CE* nos pontos *L*, *M* e *N*, respectivamente. Se *P* é um ponto sobre (α) tal que *FP* é tangente a (α), mostre que

$$FP = DM + EN.$$