Porque os cearenses gostam tanto de geometria?

Semana Olímpica 2015

Prof. Cícero Thiago

1. Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo de centro O. As diagonais AC e BD intersectam - se em P. Os círculos circunscritos aos triângulos ABP e CDP intersectam - se novamente em Q. Se O, P e Q são três pontos distintos, prove que OQ é perpendicular a PQ.

2. (OBM) Sejam H, I e O o ortocentro, o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente. A reta CI corta o circuncírculo de ABC no ponto L, distinto de C. Sabe-se que $AB = IL$ e $AH = OH$. Determine os ângulos do triângulo ABC.

3. (Ibero) Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissetriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até à reta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC. Prove que $\angle EMD = \angle DMF$.

4. (Romênia) Seja ABC um triângulo acutângulo, e seja T um ponto no interior tal que $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Sejam M, N e P as projeções de T sobre BC, CA, e AB, respectivamente. O círculo circunscrito ao triângulo MNP intersecta os lados BC, CA e AB pela segunda vez em M', N' e P', respectivamente. Prove que o triângulo $M'N'P'$ é equilátero.

5. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Prove que os incentros dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB são vértices de um retângulo.

6. (IMO) Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 intersectam - se em M e N. Seja l a tangente comum a Γ_1 e Γ_2 que está mais próxima de M do que de N. A reta l é tangente a Γ_1 em A e a Γ_2 em B. A reta paralela a l que passa por M intersecta novamente a circunferência Γ_1 em C e novamente a circunferência Γ_2 em D. As retas CA e DB intersectam - se em E; as retas AN e CD intersectam - se em P; as retas BN e CD intersectam - se em Q. Mostre que $EP = EQ$.

7. (Irã) Em um triângulo ABC temos que $\angle A = 60^o$. Seja D um ponto que varia sobre o lado BC. Sejam O_1 o circuncentro de ABD e O_2 o circuncentro de ACD. Seja M a interseção de BO_1 e CO_2 e N o circuncentro de DO_1O_2. Prove que MN passa por um ponto fixo.

8. (Belarus) Seja O o centro do círculo ex - inscrito do triângulo ABC oposto ao vértice A. Seja M o ponto médio de AC e seja P a interseção das retas MO e BC. Prove que se $\angle BAC = 2\angle ACB$, então $AB = BP$.

9. (OBM) A medida do ângulo $\angle B$ de um triângulo ABC é 120°. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM = 30^\circ$.

10. (Leningrado) Sejam AF, BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo A medindo 120^o. Prove que o ângulo GFH mede 90^o.

11. (IME) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.