Combinatória: Dicas para escrever uma boa solução.

Prof. Bruno Holanda
Semana Olímpica 2010 – São José do Rio Preto

? **Nível 1**

Uma dificuldade que é bastante frequente nos alunos do nível 1 (ou em outros quaisquer alunos que estão iniciando na olimpíada) é saber passar para o papel a solução de um problema de maneira limpa, direta e correta do ponto de vista matemático. Essa dificuldade fica ainda mais agravada quando o problema a ser resolvido é um problema de combinatória, onde apenas os recursos matemáticos usados não bastam para ter uma solução satisfatória. Nesta aula selecionamos alguns problemas em que serão dadas dicas para uma boa solução.

Problemas de Fixação

Problema 1. Cinco meninos estão em uma fila. A média das alturas dos três primeiros da fila é igual a 111 cm. A média das alturas do segundo, terceiro e quarto é igual a 137 cm e a média das alturas dos três últimos é 121 cm. Qual é a media das alturas do primeiro, terceiro e quinto menino da fila?

Problema 2. João pode escolher algumas casas de um tabuleiro 9×9 e fazer dois cortes retos em cada uma delas. Os dois cortes são feitos ao longo das diagonais, de modo que cada casa escolhida fique cortada por um $\times$. Qual o número máximo de casa que João pode escolher de modo que o tabuleiro não seja divido em duas ou mais partes?

Problema 3. Em uma festa havia seis homens e algumas mulheres. Sabe-se que:

- Existem duas mulheres que conhecem exatamente quatro homens cada uma.
- Existem três mulheres que conhecem exatamente três homens cada uma.
- As demais mulheres conhecem exatamente dois homens cada uma.
- Nenhum homem conhece mais de quatro mulheres.

Qual é o número máximo de mulheres que pode haver na festa?

Problema 4. Achar o menor natural formado exclusivamente dígitos 3 e 7, com pelo menos um dígito de cada tipo, de modo que a soma de seus dígitos seja múltiplo de 3 e de 7 e o próprio número seja múltiplo de 3 e 7.

Problemas Propostos

Problema 1. Em uma folha de papel são escritos todos os números ímpares de 1 até 47, em ordem, um após o outro, obtendo o seguinte número de 43 dígitos:

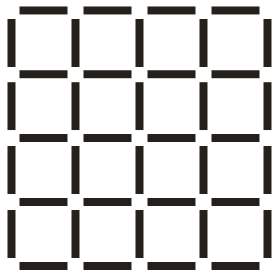
135791113...4547

Devemos apagar 33 dos dígitos deste número de modo que o resultado seja o maior possível. Qual o número que restará após a retirada dos 33 dígitos?

Problema 2. Num ano que tem 53 sábados, que dia da semana é 12 de maio?
Diga todas as possibilidades.

Problema 3. Temos 19 peças distintas de 1g, 2g,..., 19g. Nove delas são de ferro, nove são de bronze e uma é de ouro. Sabe-se que o peso total das peças de ferro é 90g maior que o peso total das peças de bronze. Qual o peso da peça de ouro?

Problema 4. A figura abaixo é formada por 40 palitos.



Nela existem 16 quadrados de lado 1, 9 quadrados de lado 2, 4 quadrados de lado 3 e um quadrado de lado 4.
Qual é a menor quantidade de palitos que devemos retirar de modo que não sobre nenhum quadrado de nenhum tamanho.

Problema 5. Na ilha de Frigia, existem 10 equipes de futebol. Durante a primeira fase do torneio local são disputados cinco jogos, cada equipe jogando exatamente uma vez. Existe também uma loteria em que cada apostador deve adivinhar o resultado entre vitória, derrota ou empate de cada um dos cinco jogos.
Três amigos, Arnaldo, Bernaldo e Ceraldo apostaram nessa loteria. Arnaldo e Bernaldo acertaram três resultados cada um. Enquanto Ceraldo acertou apenas dois resultados. Confira o cartão de aposta de cada um deles:

	V	D	E
1	X		
2	X		
3		X	
4		X	
5			X

Arnaldo

	V	D	E
1			X
2		X	
3	X		
4		X	
5	X		

Bernaldo

	V	D	E
1	X		
2	X		
3			X
4	X		
5		X	

Cernaldo

Determine o cartão com as cinco respostas corretas.

Soluções dos Problemas de Fixação

Problema 1. Cinco meninos estão em uma fila. A média das alturas dos três primeiros da fila é igual a 111 cm. A média das alturas do segundo, terceiro e quarto é igual a 137 cm e a média das alturas dos três últimos é 121 cm. Qual é a media das alturas do primeiro, terceiro e quinto menino da fila?

Solução. Sejam a, b, c, d, e as alturas dos meninos segundo suas ordens na fila.
Dessa forma,

$$\frac{a+b+c}{3}=111, \quad \frac{b+c+d}{3}=137, \quad \frac{c+d+e}{3}=121.$$

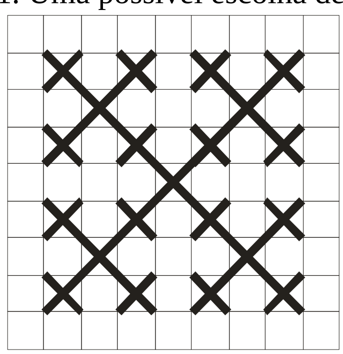
Devemos achar $\frac{a+c+e}{3}$.

Como $\frac{a+b+c}{3}-\frac{b+c+d}{3}+\frac{c+d+e}{3}=\frac{a+c+e}{3}$, devemos ter que

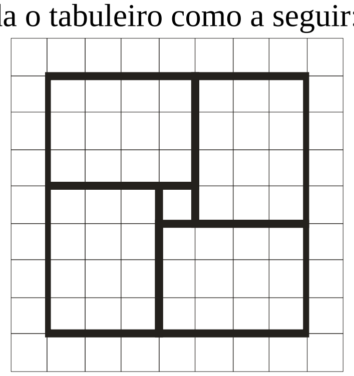
$$\frac{a+c+e}{3}=111-137+121=95$$

Problema 2. João pode escolher algumas casas de um tabuleiro 9×9 e fazer dois cortes retos em cada uma delas. Os dois cortes são feitos ao longo das diagonais, de modo que cada casa escolhida fique cortada por um $\times$. Qual o número máximo de casa que João pode escolher de modo que o tabuleiro não seja divido em duas ou mais partes?

Solução. O número máximo é 21. Uma possível escolha de 21 casas é o seguinte:



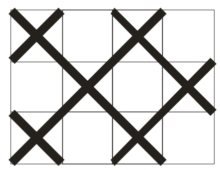
Veja que não podemos cortar casas da borda ou duas casas vizinhas. Para demonstrar que 21 é realmente o máximo. Divida o tabuleiro como a seguir:



Suponha que sejam feitos 22 cortes. Se a casa do centro do tabuleiro for cortada, ainda sobrarão mais 21 cortes. Como eles não podem ser feitos na borda, devemos distribuí-los entre as quatro regiões formadas pelos sub-tabuleiros 4×3. Neste caso, algum deles deve receber seis cortes.

Agora, cada uma das linhas deste sub-tabuleiros 4×3 deve receber dois cortes exatamente. Caso contrário, existirão duas casas vizinhas cortadas e neste caso, o tabuleiro seria dividido em pedaços.

Se os dois cortes forem feitos na primeira e terceira coluna da primeira linha, os cortes da segunda linha devem ser feitos na segunda e quarta coluna, caso contrário existirão duas casas cortadas vizinhas.



Da mesma forma, os cortes feitos na terceira linha devem ser feitos na primeira e terceira colunas. Porém, mesmo assim, o tabuleiro seria dividido.

Se pensarmos que dois cortes feitos na primeira linha sejam na segunda e quarta coluna, o procedimento é o mesmo. Assim, não podemos ter mais que 21 casas cortadas.

Problema 3. Em uma festa havia seis homens e algumas mulheres. Sabe-se que:

- Existem duas mulheres que conhecem exatamente quatro homens cada uma.
- Existem três mulheres que conhecem exatamente três homens cada uma.
- As demais mulheres conhecem exatamente dois homens cada uma.
- Nenhum homem conhece mais de quatro mulheres.

Qual é o número máximo de mulheres que pode haver na festa?

Solução. Vamos associar cada uma das mulheres a um ponto em formado de cruz, e a cada homem um ponto em formato de círculo como será mostrado na próxima figura. Vamos unir uma cruz a um círculo por meio de um segmento se o homem e a mulher correspondentes se conhecem.

Como cada homem conhece no máximo quatro mulheres e existem seis homens, o número máximo de segmentos será 24. Por outro lado, se x é o número de mulheres que conhece exatamente dois homens, o número de segmento pode ser dado por

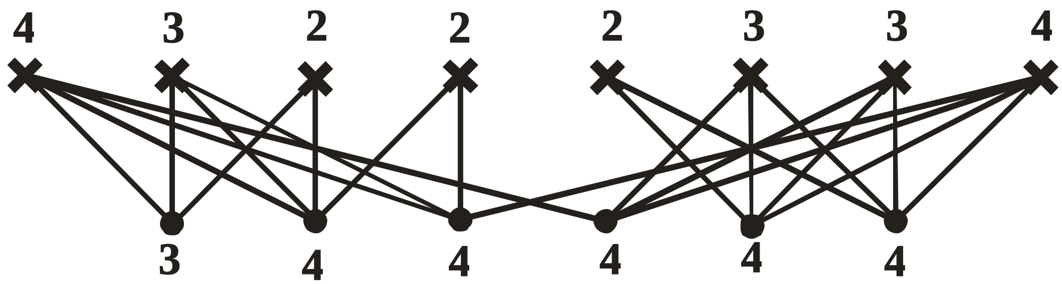
$$2\cdot 4+3\cdot 3+2x=17+2x$$

Assim,

$$17+2x\leq 24$$

$$x\leq 3,5$$

Como x é um número inteiro, o seu valor máximo deve ser 3. Assim, basta achar um exemplo com oito mulheres. Veja como pode ser feito:



Problema 4. Achar o menor natural formado exclusivamente dígitos 3 e 7, com pelo menos um dígito de cada tipo, de modo que a soma de seus dígitos seja múltiplo de 3 e de 7 e o próprio número seja múltiplo de 3 e 7.

Solução. Dado que a soma dos dígitos deve ser múltiplo de 3, a quantidade de dígitos 7 deve ser múltiplo de 7. Da mesma forma, a quantidade de 3 deve ser múltiplo de 7. Portanto, devemos usar no mínimo 10 dígitos. Para que o número seja o menor possível devemos ter a maior quantidade possível de algarismos 3 na sua esquerda.
Vamos admitir que existe um número cujos cinco primeiros dígitos são 3 e que cumpre as propriedades do problema.
Seja $n = 33333abcde$ o número buscado. Onde dos dígitos a, b, c, d, e três são iguais a 7 e os outros dois iguais a 3. Note que $n = 3333300000 + abcde$.
Como 3333300000 deixa resto 2 na divisão por 7, o número $abcde$ deve deixar resto 5 na divisão por 7.
Vamos ver o resto que cada algarismo 3 implica se for colocado nas posições possíveis:

$$3 \cdot 10^4 = 30000 = \textit{resto } 5$$

$$3 \cdot 10^3 = 3000 = \textit{resto } 4$$

$$3 \cdot 10^2 = 300 = \textit{resto } 6$$

$$3 \cdot 10 = 30 = \textit{resto } 2$$

$$3 = \textit{resto } 3$$

A única combinação de dois dígitos que deixa resto 5 é 30+3.
Portanto, o número procurado é 3333377733.