Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Aula 15

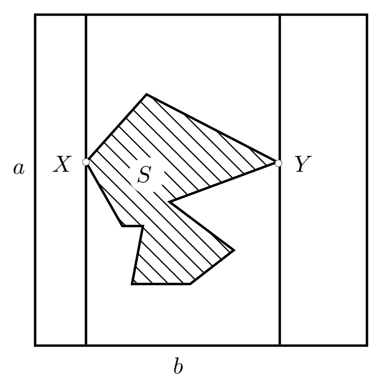
Prof. Bruno Holanda

Combinatória Geométrica

Vamos começar com um problema relativamente simples que apareceu na olimpíada do Cone Sul de 2000. Este problema ilustra como podemos usar ideias já vistas antes para resolver problemas que, em sua essência, são problemas de geometria. Neste exemplo particular, usaremos o princípio do extremo.

Problema 1. Um polígono S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separads por uma distância maior que ou igual a S/a.

Solução. Suponha quem quaisquer dois pontos do polígono estejam separados por uma distância menor que S/a. Considere o ponto mais a esquerda e o ponto mais a direita.



Se b é a diferença entre suas abscissas, temos

$$S \leq a \cdot b \Rightarrow \frac{S}{a} \leq b.$$

Por outro lado, $\overline{XY} \geq b$. Portanto,

$$\overline{XY} \geq \frac{S}{a}.$$

Problema 2. (Ibero 1997) Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com P_1 sendo o centro do círculo. Para $k = 1, 2, ..., 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k. Mostre que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

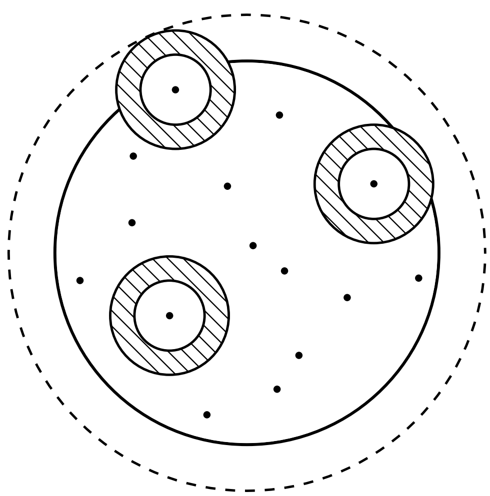
Solução. Note que $x_k \leq 1$, para todo k. Para cada $k = 1, ..., 1997$ trace uma circunferência de raio $x_k/2$ e centro em P_k. Estas 1997 circuferências não se intersectam (no máximo se tocam) e estão todas no interior de uma circunferência Γ de centro em P_1 e raio $3/2$. Desta forma, a soma de suas áreas é menor que a área de Γ. Escrevendo isto em uma equação, temos:

$$\sum_{k=1}^{1997} \left(\frac{x_k}{2}\right)^2 \leq \frac{9\pi}{4}.$$

Dividindo tudo por $\pi/4$, obtemos o resultado procurado.

Problema 3. Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Agora suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C. Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S.

Solução. Suponha que uma cópia de A seja centrada em cada um dos 650 pontos de S. Considere um círculo D, concêntrico de C e de raio 19.



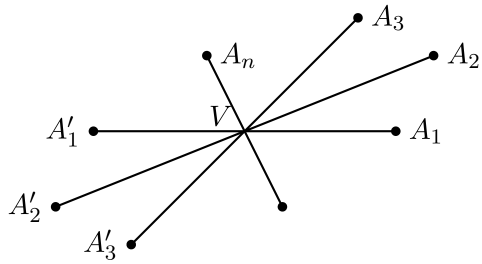
Note que a área de A é $3^2\pi - 2^2\pi = 5\pi$. Dessa forma, as 650 cópias de A irão fazer uma *supercobertura* de área de $650 \times 5\pi = 3250\pi$.

Agora, se cada ponto de D for coberto por não mais do que 9 anéis, a área coberta não pode ser maior que $9(19^2\pi) = 3249\pi$. Portanto, existe um ponto X de D que é coberto por pelo menos 10 aneis.

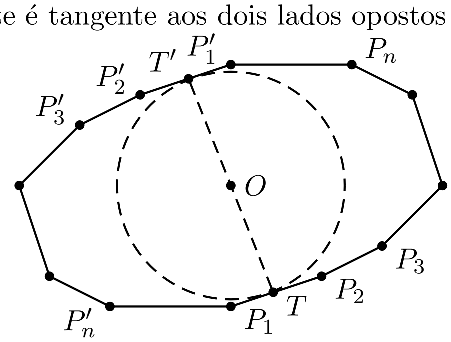
Se Y_i é o centro de um anel que cobre X, o anel de centro X também irá cobrir Y_i. Pois $2 \leq \overline{XY_i} \leq 3$. Logo, esse anel também cobre 10 pontos de S.

Problema 4. (Proposto para IMO 1989) Temos um conjunto finito de segmentos no plano, de medida total 1. Prove que existe uma reta ℓ tal que a soma das medidas das projeções destes segmentos a reta ℓ é menor que $2/\pi$.

Solução. Vamos transladar os segmentos de modo que seus pontos médios coincidam em um ponto V. Vamos designar as $2n$ extremidades por $A_1, A_2, ..., A_n, A_1', A_2', ..., A_n'$. A partir de um ponto P_n' desenhamos o segmento $P_n'P_1$ igual e paralelo a VA_1, a partir de P_1 desenhamos o segmento P_1P_2 igual e paralelo a VA_2, e assim por diante obtendo $P_3, ..., P_n, P_1', ..., P_n'$. Que é um polígono convexo $\mathcal{P}$ de $2n$ vértices, com um centro de simetria O. Pois os pares de lados opostos são iguais e paralelos.



Escolha um par de lado opostos cuja distância D é mínima. Considere o círculo Γ de centro O e diâmetro D; este é tangente aos dois lados opostos e interior ao polígono.



Então,

$$\pi D < \text{perimetro}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} s_i = 1.$$

Dessa forma, $D < 1/\pi$. Por outro lado, as projeções ortogonais de todos os $2n$ lados de $\mathcal{P}$ sobre TT' possui medida total igual a $2D$. Logo, como $2D < 2/\pi$, segue o resultado.

Problemas Propostos

Problema 5. Um n-ágono convexo $\mathcal{M}$ é particionado em triângulos por várias diagonais que não se cortam. Mais ainda, cada vértice de $\mathcal{M}$ pertence a um número ímpar de tais triângulos. Mostre que n é divisível por 3.

Problema 6. No centro de um terreno cercado quadrado se encontra um lobo, e em cada vértice do quadrado há um cachorro. O lobo pode correr por todo o terreno, enquanto os cachorros podem correr apenas pelas bordas. Sabe-se que os cachorros (que possuem todos a mesma velocidade) são $1,5$ vezes mais rápidos do que o lobo. Demonstre que os cachorros podem coordenar seus movimentos de modo que o lobo não possa escapar do terreno.

Problema 7. São colocados 100 pontos no plano. Mostre que podemos usar alguns discos para cobrir estes pontos de modo que a soma dos diâmetros seja menor do que 100 e a distância entre quaisquer dois disco seja maior do que 1.

Problema 8. (Torneio das Cidades 1980) Um conjunto finito de segmentos, de comprimento total 18, estão no interior de um quadrado unitário (assuma que o interior também contém as bordas e os vértices). Os segmentos são paralelos aos lados do quadrado e podem se cruzar. Prove que dentre as regiões em que o quadrado é dividido, há pelo menos uma de área não menor que $0,01$.

Problema 9. (Banco IMO 2003) Seja $n \geq 5$ um inteiro positivo. Determine o maior inteiro k para o qual existe um polígono com n vértices (convexo ou não, porém sem auto-interseções) que possui k ângulos internos de $90°$.