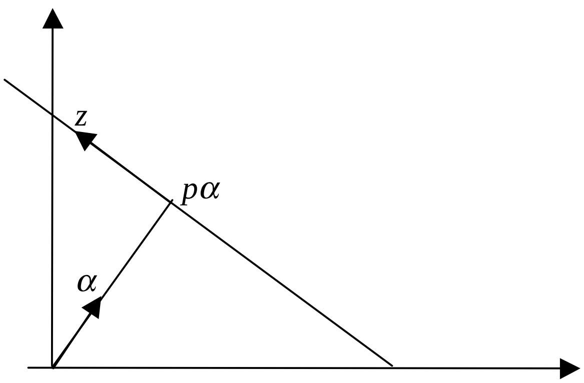
NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA

MARCIO COHEN – COLÉGIO PONTO DE ENSINO
marciocohen@superig.com.br

1. EQUAÇÃO DA RETA: $z + k\bar{z} = cte$

(onde *k* e *cte* têm seus significados geométricos evidenciados na demonstração abaixo).



DEMO:

Seja α um complexo perpendicular a reta *r*, e *p* o real tal que $p\alpha \in r$.

$$z \in r \Leftrightarrow z - p\alpha \perp \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{z - p\alpha}{\alpha} + \frac{\overline{z} - p\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$z + \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z} = 2p\alpha$$

OBSERVAÇÕES:

(i) A reta passando por dois complexos *a* e *b* tem direção *b* - *a*, de modo que podemos tomar $\alpha = (b - a)\cdot i$.

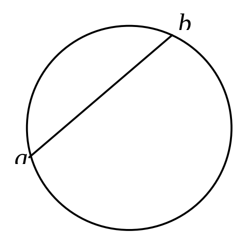
(ii) Note que uma reta perpendicular a *r* é da forma (trocando α por $i\alpha$) $z - k\overline{z} = cte'$.

(iii) Na prática, dados 2 pontos, determina-se *k* e então substitui-se um ponto qualquer da reta e encontra-se *cte*.

2. LEMAS IMPORTANTES:

2.1. CORDA NO CÍRCULO UNITÁRIO:

Se *a* e *b* são tais que $|a| = |b| = 1$, então $\overleftrightarrow{ab} : z + ab\overline{z} = a + b$



DEMO: Como $a \cdot \overline{a} = b \cdot \overline{b} = 1$:

$$k = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} = \frac{(b-a)\cdot i}{(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})\cdot(-i)} = \frac{(b-a)\cdot i}{(a-b)\cdot(-i)} \cdot ab = ab.$$

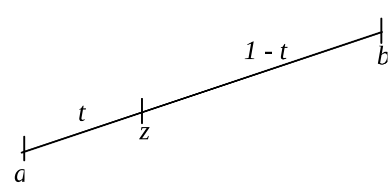
E, $b \in r \Rightarrow cte = b + ab\overline{b} = b + a$.

Obs: Fazendo *a* = *b*, obtém-se a equação da tangente a circunferência em *a*.

2.2. DIVISÃO DE SEGMENTO NUMA RAZÃO *t* DADA: $z = (1-t)a + tb$

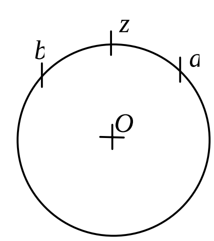
DEMO:

$\frac{z-a}{t} = \frac{b-z}{1-t}$, pois são vetores de mesma direção e mesmo módulo (um).



Isolando *z*, obtemos a expressão acima.

2.3. PONTO MÉDIO DE UM ARCO *ab* DO CÍRCULO UNITÁRIO: $z = \pm\sqrt{ab}$



$$ang < \overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oz} > = ang < \overrightarrow{oz}, \overrightarrow{oa} > \Rightarrow \arg\frac{z-o}{b-o} = \arg\frac{a-o}{z-o}$$

Como $\frac{z}{b}$ e $\frac{a}{z}$ têm também o módulo (um), eles são iguais:

$$\frac{z}{b} = \frac{a}{z} \Rightarrow z^2 = ab \Rightarrow z = \pm\sqrt{ab}$$

3. PONTOS NOTÁVEIS:

3.1. **BARICENTRO** G de um Δabc: $\boxed{G = \dfrac{a+b+c}{3}}$

DEMO:

Basta observar que $G = \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot b + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{1}{3}\cdot a + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{1}{3}\cdot c + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a+b}{2}$, de forma que G está nas três medianas.

3.2. **ORTOCENTRO** H de um Δabc inscrito no círculo unitário: $\boxed{H = a+b+c}$.

DEMO:

$\overleftrightarrow{bc} : z + bc\bar{z} = b + c$

Perpendicular s a bc: $z - bc\bar{z} = cte'$

Altura por a: $a \in s \Rightarrow cte' = a - bc\bar{a} = a - \dfrac{bc}{a}$.

Trocando a com b, obtém-se a altura h_b, e daí o sistema:

$$\begin{cases} h_a : z - bc\bar{z} = a - \dfrac{bc}{a} \\ h_b : z - ac\bar{z} = b - \dfrac{ac}{b} \end{cases}$$

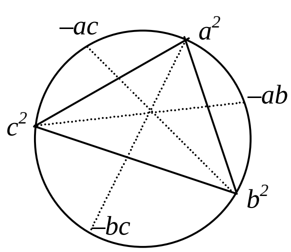
Multiplicando a primeira por a, a segunda por b e subtraindo:

$$(a-b)z = (a^2 - b^2) - c\cdot(b-a)$$

Dividindo por $a - b$ obtém-se H (não é difícil concluir que $H \in h_c$).

3.3. **INCENTRO** I de um $\Delta a^2b^2c^2$ inscrito no círculo unitário: $\boxed{I = -ab - bc - ac}$.

DEMO:



Inicialmente, note que podemos escolher a, b, c de modo que os pontos médios interiores tenham sempre o sinal de menos como na figura.

Equações das bissetrizes:

$$\begin{cases} b_a : z - a^2bc\bar{z} = a^2 - bc \\ b_b : z - ab^2c\bar{z} = b^2 - ac \\ b_c : z - abc^2\bar{z} = c^2 - ab \end{cases}$$

Resolvendo, $I = b_a \cap b_c = -(bc + ca + ab)$

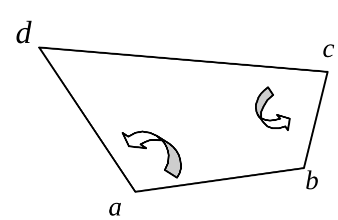
4. QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: Os complexos a, b, c, d são vértices (nessa ordem) de um quadrilátero inscritível se e somente se $\boxed{\dfrac{(d-a)\cdot(d-c)}{(b-a)\cdot(b-c)} \in \Re_+}$.

DEMO:

$$abcd\ inscritível \Leftrightarrow ang < dab > + ang < bcd > = \pi \Leftrightarrow$$

$$\arg\left\{\frac{d-a}{b-a}\right\} + \arg\left\{\frac{b-c}{d-c}\right\} = \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi) \Leftrightarrow$$

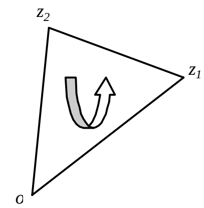
$$\arg\left\{\frac{d-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{d-c}\right\} = \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi) \Leftrightarrow \frac{(d-a)\cdot(b-c)}{(b-a)\cdot(d-c)} \in \Re_-$$



Obs: Mais importante do que o resultado é a noção de como podemos tratar ângulos de forma simples usando complexos! Note que identidades como $\arg z = -\arg\dfrac{1}{z}$, permitem obtermos algumas expressões equivalentes.

5. ÁREA DE POLÍGONO CONVEXO de vértices $z_1, z_2, \ldots, z_n$: $S = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{z_2\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + \ldots + z_1\overline{z_n}\right\}$

(Obs: vértices nesse item são sempre tomados no sentido anti-horário)



LEMA: O triângulo de vértices o, z_1, z_2 tem área
$S = \dfrac{1}{2}|z_1|\cdot|z_2|\cdot sen(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{z_2\overline{z_1}\right\}$.
DEMO: Se a origem o for interior ao polígono, ligando-a aos vértices e somando obtemos a expressão acima.

Se esse não for o caso, basta fazer uma translação (que preserva áreas) que coloque a origem dentro do polígono e notar que a expressão anterior não muda se trocarmos z por $z + w$ (pois $z_k + \overline{z_k} \in \Re$ para todo k, e $w \cdot \overline{w} \in \Re$), de modo que a fórmula continua valendo.

6. EXERCÍCIOS TRADICIONAIS:

1. (PTOLOMEU) Dados 4 pontos A, B, C, D no plano, tem-se $AB\cdot CD + BC\cdot DA \geq AC\cdot BD$, com igualdade se e somente se os pontos são cocíclicos (no sentido horário ou anti-horário).

2. (CARACTERIZAÇÃO DE TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS) Os complexos a, b, c são vértices de um triângulo equilátero sse $a + wb + w^2c = 0 \ ou \ a + w^2b + wc = 0$, onde w é uma raiz cúbica da unidade.

3. (RETA DE SIMPSON) Mostre que os pés das perpendiculares traçadas de um ponto D a um triângulo ABC são colineares sse D está no circuncírculo de ABC.

4. (CÍRCULO DOS 9 PONTOS) Dado um triângulo ABC, mostre que os pés das 3 alturas, os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro a cada um dos vértices pertencem a um mesmo círculo. (*Sugestão*: Colocando o circuncentro na origem, tente mostrar que esses 9 pontos equidistam do ponto $(a+b+c)/2$).

5. (RETA DE EULER) O circuncentro, o baricentro, o ortocentro e o centro do círculo dos 9 pontos de um triângulo são sempre colineares.

6. (FEUERBACH) O círculo dos 9 pontos de um triângulo é tangente ao seu incírculo (*Obs*: Nesse exercício e no próximo deve ser necessário encontrar uma expressão explícita para o inraio).

7. (MORLEY) As interseções dos pares adjacentes de trissetrizes (cevianas que dividem o ângulo em 3 partes iguais) de um triângulo arbitrário formam um triângulo equilátero.

8. Sejam R e r o circunraio e o inraio de um triângulo ABC, e d a distância entre o centro desses dois círculos. Mostre que $d^2 = R(R-2r)$.

9. (IME) Seja ABC um triangulo e P, Q, R as interseções das tangentes ao circuncírculo nos vértices com as extensões dos respectivos lados opostos. Mostre que os pontos P, Q, R são colineares.

10. (MOSCOU) Cada lado de um polígono é extendido de duas vezes o seu comprimento em uma de suas pontas seguindo sempre a direção anti-horária. Mostre que se o polígono formado pelos vértices dessas extensões é regular então o polígono original também é.

7. PROBLEMAS OLÍMPICOS:

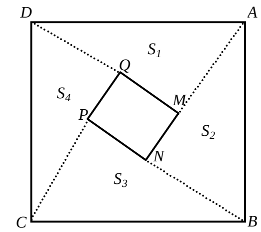
1. (MOP) Seja H o ortocentro do triângulo ABC. O círculo de diâmetro CH intercepta os lados BC e AC nos pontos P e Q respectivamente. Mostre que as tangentes a esse círculo nos pontos P e Q interceptam-se no ponto médio de AB.

2. (IMO-03) Considere um quadrilátero $ABCD$ inscritível. Os pés da perpendicular por D às retas AB, BC, CA são P, Q, R respectivamente. Mostre que a reta AC e as bissetrizes dos ângulos ABC e CDA são concorrentes sse $RP=RQ$.

3. (IMO-02) Seja BC um diâmetro de um círculo de centro O, e A um ponto na circunferência tal que $\angle AOC > 60^0$. A corda EF é mediatriz de AO, e D é o ponto médio do menor arco AB. Seja J o ponto de interseção de AC com a reta paralela a AD passando por O. Mostre que J é incentro do triângulo CEF.

4. (EUREKA) Considere um quadrado $MNPQ$ interior a um quadrado $ABCD$ como ilustrado na figura anexa.

Demonstre a relação entre áreas $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.



5. (IMO-00) $A_1A_2A_3$ é um triângulo agudo. O pé da altura de A_i é K_i e o incírculo τ toca o lado oposto a A_i em L_i. A reta K_1K_2 é refletida na reta L_1L_2. Analogamente, as retas K_2K_3 e K_3K_1 são refletidas nas retas L_2L_3 e L_3L_1 respectivamente. Mostre que essas três novas retas formam um triângulo inscrito no círculo τ.

6. (BANCO IMO) Seja ABC um triângulo tal que $\angle ACB = 2\angle ABC$. Seja D o ponto do lado BC tal que $CD = 2BD$. Prolonga-se o segmento AD até um ponto E tal que $AD = DE$. Mostre que $\angle ECB + 180 = 2\angle EBC$.

7. (EUREKA) Dada uma circunferência Γ, trace as tangentes a ela por um ponto exterior, A, tocando-a em M e N. Trace a reta r passando por A e tocando Γ em B e C. Se D é o ponto médio de $\overline{MN}$, prove que $\overline{MN}$ é a bissetriz de $\angle BDC$.

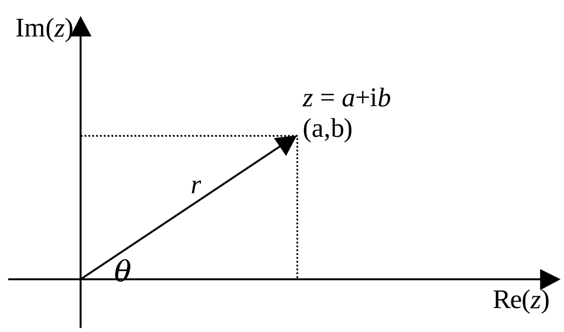
8. (PUTNAM-03) Seja ABC um triângulo equilátero com circuncentro O. Mostre que para todo ponto P interior ao circuncírculo existe um triângulo de lados PA, PB,PC e a área desse triângulo depende apenas de PO.

9. (BANCO IMO) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com AB não paralelo a CD, e seja X interior a $ABCD$ tal que $\angle ADX = \angle BCX < 90^0$ e $\angle DAX = \angle CBX < 90^0$. Se Y é o ponto de interseção das mediatrizes de AB e CD, mostre que $\angle AYB = 2\angle ADX$

10. (OBM) Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.

8. ANEXO

Os números complexos são uma forma eficiente de representar pontos no plano. A cada ponto (a,b) associamos o complexo $z = a + ib$, como ilustrado na figura abaixo.



Forma Trigonométrica:

$$z = r cis\theta \quad (= r\cos\theta + i \cdot rsen\theta)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (módulo)$$

$$\theta = \arctan\frac{b}{a} \quad (\arg umento)$$

Esse números podem ser operados conforme as regras tradicionais de álgebra, usando-se a igualdade $i^2 = -1$ sempre que possível.

PROPRIEDADES BÁSICAS: Sejam $z_1 = a_1 + ib_1 = r_1 cis\theta_1,\quad z_2 = a_2 + ib_2 = r_2 cis\theta_2$.

(i) $z_1 z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$

(ii) $ang < z_1, z_2 >= \arg\frac{z_2}{z_1}$ (mod 2π)

(iii) $r^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (onde $\bar{z} = a - ib$ é denominado conjugado de z).

(iv) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (com igualdade sse $\frac{z_2}{z_1} \in \Re$).

(v) $z_1^{1/n} = r_1^{1/n} cis\left(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,\ldots,n-1$

Demonstrações: Em (i), basta multiplicar e usar as expressões para sen(x + y) e cós(x + y). Em (ii), olhe para a fórmula trigonométrica. Ambos os lados valem $\theta_2 - \theta_1$. (iv) é equivalente a desigualdade de Cauchy-Schwarz. E (v) sai do fato de que dois complexos são iguais na forma trigonométrica sse tem mesmo módulo e mesmo argumento módulo 2π.

A afirmação (i) ilustra que girar um complexo de um ângulo θ_2 equivale a multiplicá-lo por $cis(\theta_2)$. Ela mostra a principal vantagem de usarmos complexos na geometria, que é a possibilidade de caracterizarmos ângulos entre retas através de simples divisões/multiplicações.

Um importante corolário de (v) é que as raízes da equação $z^n - 1 = 0$ são os vértices do n-ágono regular inscrito no círculo unitário.

EXERCÍCIOS DO ANEXO:

1. Se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são números complexos, então $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + \ldots + |z_n|$.
2. z é real sse $z = \bar{z}$, e z é imaginário puro sse $z + \bar{z} = 0$
3. $z_1 \perp z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 0$

9. REFERÊNCIAS

(i) Aplicações dos números complexos à geometria, Revista Eureka 6
Edmilson Motta

(ii) Complex numbers in geometry, Berkley Math Circle
Zvezdelina Stankova – Frenkel

(iii) Banco de problemas: http://www.kalva.demon.co.uk

(iv) Complex numbers & Geometry, The Mathematical Association of America
Liang – Shin Hahn, 1994