Concorrência e Colinariedade

Semana Olímpica 2007
Samuel Feitosa
samuelbf85@gmail.com

Teoremas

Teorema 1. *(Teorema de Ceva) As cevianas AX, BY, CZ do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Teorema 2. *(Teorema de Menelaus) Se os pontos X, Y, Z estão sobre os lados AB, BC, CA do triângulo $\triangle ABC$ e são colineares vale,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Teorema 3. *(Teorema de Pappus) Se A, C, E são três pontos sobre uma reta, B, D, F sobre outra reta, e se as retas AB, CD, EF encontram DE, FA, BC, respectivamente, então os pontos de encontro L, M, N são colineares.*

Definição 1. *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são chamados de copolares se AA', BB', CC' são concorrentes.*

Definição 2. *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são chamados de coaxiais se os pontos de interseção de $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$, $AB \cap A'B'$ são colineares.*

Teorema 4. *(Teorema de Desargues) $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são copolares se, e somente se, são coaxiais.*

Teorema 5. *(Teorema de Pascal) Se todos os seis vértices de um hexágono estão sobre um círculo e os três pares de lados opostos se intersectam, então os três pontos de interseção são colineares.*

Teorema 6. *(Teorema de Brianchon) Se todos os seis lados de um hexágono são tangentes a um círculo, então as três diagonais que unem vértices opostos são concorrentes.*

Problemas

Problema 1. *(Torneio das Cidades 1983) Os vértices A, B, C de um triângulo são ligados aos pontos A', B', C', respectivamente, que estão sobre os lados opostos aos vértices (mas não são vétices do triângulo). É possível que os pontos médios dos segmentos AA', BB' e CC' sejam colineares?*

Problema 2. *(Torneio das Cidades 2002) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e reversos. Prove que os pontos médios de AA', BB', CC' são colineares.*

Problema 3. *Um círculo passa através dos vértices B e C do triângulo $\triangle ABC$ e encontra AB em P e AC em R. Se PR encontra BC em Q, prove que $\dfrac{QC}{QB} = \dfrac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}$.*

Problema 4. *No quadrilátero $ABCD$, AB e CD encontram-se em P, AD e BC encontram-se em Q. As diagonais AC e BD encontram PQ em X e Y, respectivamente. Prove que $\dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YQ}$.*

Problema 5. *Prove que uma reta desenhada através do baricentro G do triângulo $\triangle ABC$ encontra os lados AB e AC em pontos M e N, respectivamente, tais que $AM \cdot NC + AN \cdot MB = AM \cdot AN$.*

Problema 6. *No triângulo $\triangle ABC$, pontos L, M, N estão em BC, AC, AB, respectivamente, e AL, BM, CN são concorrentes.*

i) Encontre o valor numérico de $\dfrac{PL}{AL} + \dfrac{PM}{BM} + \dfrac{PN}{CN}$

ii) Encontre o valor numérico de $\dfrac{AP}{AL} + \dfrac{BP}{BM} + \dfrac{CP}{CN}$

Problema 7. *Os pontos E e F são escolhidos sobre os lados AB e AC, respectivamente, do triângulo $\triangle ABC$ de modo que $AE = AF$. A mediana AM intersecta EF no ponto Q. Prove que $\dfrac{QE}{QF} = \dfrac{AC}{AB}$.*

Problema 8. *O $\triangle ABC$ corta um círculo Γ nos pontos: $\{E, E'\} = \Gamma \cap AB$, $\{D, D'\} = \Gamma \cap BC$ e $\{F, F'\} = \Gamma \cap AC$. Prove que se AD, BF e CF são concorrentes, então AD', BF' e CE' também serão concorrentes.*

Problema 9. *Prove que os três pares de tangentes externas comuns a três círculos, tomados dois a dois, encontram-se em três pontos colineares.*

Problema 10. *Um círculo inscrito no triângulo $\triangle ABC$ é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos L, M e N, respectivamente. Se o prolongamento de MN encontra BC em P,*

i) Prove que $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BP}{PC}$

ii) Prove que se NL encontra AC em Q e ML encontra AB em R, então P, Q e R são colineares.

Problema 11. *No triângulo $\triangle ABC$, onde CD é a altura relativa ao lado AB e P é qualquer ponto sobre DC, AP encontra CB em Q e BP encontra CA em R. Prove que $\angle RDC = \angle QDC$.*

Problema 12. *No triângulo $\triangle ABC$, pontos E, F e D são oa pés das alturas relativas aos vértices A, B, C, respectivamente. Os prolongamentos ds lados do triângulo pedal encontram os lados do triângulo $\triangle ABC$ os pontos M, N e L. Prove que M, N, L são colineares.*

Problema 13. *No triângulo $\triangle ABC$, L, M, N são os pés das alturas dos vértices A, B, C, respectivamente. Prove que as perpendiculares de A,B e C a MN, LN e LM, respectivamente, são concorrentes.*

Problema 14. *(Banco IMO 1991) De um ponto interior do triângulo $\triangle ABC$, perpendiculares PQ e PR são desenhadas aos lados BC e AC. Do vértice C, perpendiculares CS e CT são traçadas aos prolongamentos de AP e BP, respectivamente. Prove que o ponto de interseção U de RT e QS está sobre AB.*

Problema 15. *(Teorema de Sylvester) Um conjunto S de pontos no plano tem a seguinte propriedade: qualquer reta passando por 2 pontos passa também por um terceiro. Mostre que todos os pontos estão sobre uma reta*

Problema 16. *São dados $N \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares. Mostre que são necessários pelo menos N retas para unir todos os possíveis pares de pontos.*

Problema 17. *São desenhadas N retas no plano $N \geq 3$, não havendo 2 delas paralelas, por todo ponto de interseção de 2 retas, passa pelo menos mais uma reta. Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.*