Contagem, Pombos e Geometria

Semana Olímpica 2015

Prof. Cícero Thiago

1. (**Rússia**)
   O que há mais entre os números naturais de 1 a 1000000, inclusive: números que podem ser representados como uma soma de um quadrado perfeito e um cubo perfeito (positivo), ou números que não podem?

2. Seja $X = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ e seja $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in X, \ a < b \text{ e } a < c\}$. Determine a quantidade de elementos do conjunto S.

3. Estando sobre a mesa algumas pilhas de discos um movimento permitido é escolher uma pilha, descartar um de seus discos e dividir o restante da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais. Inicialmente existe sobre a mesa somente uma pilha e esta contém 1000 discos. Determine se é possível, após uma sequência de movimentos permitidos, chegar em uma situação em que cada pilha tenha exatamente 3 discos.

4. (**Rioplatense**)
   Algumas pessoas vão a uma pizzaria. Cada pessoa que está faminta quer comer 6 ou 7 pedaços de pizza, e as outras querem comer 2 ou 3 pedaços. Cada pizza possui 12 pedaços. Sabe - se que 4 pizzas não são suficientes para satisfazer a todos, mas com 5 pizzas sobrariam alguns pedaços. Quantas pessoas foram à pizzaria? Quantas delas estavam famintas?

5. (**Rússia**)
   Em um torneio de xadrez com 8 participantes, todos jogam contra todos (uma só vez). A vitória vale um ponto, o empate meio ponto e a derrota zero ponto. No final do torneio, todos os competidores obtiveram pontuações distintas e o 2° colocado somou tantos pontos quanto os 4 últimos juntos. Qual foi o resultado da partida entre o terceiro e o quinto colocado?

6. (**Colorado Mathematical Olympiad**)
   Para a sua festa de aniversário de 100 anos George convidou 202 amigos. Eles lhe presentearam com um bolo de aniversário retangular com, é claro, 100 velas sobre ele tais que não existem três velas, ou duas velas e um canto do bolo, ou uma vela e dois cantos do bolo sobre uma mesma reta. George irá cortar o bolo em pedaços triangulares por cortes retos ligando velas umas com as outras ou com cantos do bolo de tal maneira que todas as velas serão usadas. Prove que existem pedaços suficientes para atender a todos os convidados com um pedaço de bolo, mas não sobrará nenhum pedaço para George.

7. Sejam k pontos no interior de um quadrado de lado 1. Uma triangulação desse quadrado com vértices nesses k pontos e nos vértices do quadrado é tal que a área de cada triângulo é no máximo $\frac{1}{12}$. Prove que $k \geq 5$.

8. (**Estônia**)
   Um polígono regular de 2010 lados é dividido em triângulos. Determine o menor número possível de triângulos.

9. (**IMO**)
   Todos os pontos sobre os lados de um triângulo equilátero são coloridos usando apenas duas cores. Mostre que existem três pontos sobre o perímetro do triângulo coloridos com a mesma cor e que são vértices de um triângulo retângulo.

10. Sejam a, b, c e d números inteiros. Mostre que o produto $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ é divisível por 12.

11. Em cada casa de um tabuleiro 7×4 é escrito um número entre 1 e 28 sem que existam números repetidos no tabuleiro. Sejam P_1, P_2, P_3 e P_4 os produtos dos números em cada uma das 4 colunas, respectivamente, prove que pelo menos um desses produtos é múltiplo de 128.

12. Números inteiros são escritos em todas as 16 casas de um tabuleiro 4×4, tal que a soma dos vizinhos de cada número é igual a 1 (duas casas são consideradas vizinhas se possuem um lado em comum). Ache a soma de todos os números do tabuleiro.