Semana Olímpica 2014 - Contagens Elementares

Samuel Feitosa

Princípio Multiplicativo

Problema 1. *Considere o conjunto* $M = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ *e seu subconjunto* A *formado por todos os números da forma* $m^2 + k^3$ *com* m *e* n *naturais. Quem tem mais elementos:* A *ou* $M\backslash A$*?*

Problema 2. *Mostre que existem infinitos inteiros positivos* n *que não podem ser escritos na forma*

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} + x_5^{13}$$

com $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{N}$

Problema 3. *Encontre o número de triplas de conjuntos* (A, B, C) *tais que* $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 2003\}$ *e* $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Contagens Duplas

Problema 4. *(IMO 1998/2) Num concurso, há* a *candidatos e* b *juízes, onde* $b \geq 3$ *é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo passar ou não. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo* k *candidatos. Prove que*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

Problema 5. *(Olimpíada Russa) Com os dígitos* 1 *e* 2 *formamos 5 números de* n *dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente* m *casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:*

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

Problema 6. *(Olimpíada Russa) Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática. A prova possuia 6 problemas. Sabemos que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois participantes de modo que para qualquer problema, pelo menos um deles dois conseguiu uma solução correta.*

Problema 7. *(Olimpíada Russa) Bruno pintou* k *casas de um tabuleiro* $n \times n$ *de preto. Ele observou que não existiam quatro casas pretas formando um um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro. Mostre que:*

$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

Permutações e Combinações

Problema 8. *(AMC) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?*

Problema 9. *(Torneio das Cidades 1997) Duas pessoas realizam um truque. A primeira retira 5 cartas de um baralho de 52 cartas (previamente embaralhado por um membro da platéia), olha-as, e caloca-as em uma linha da esquerda para a direita: uma com a face para baixo (não necessariamenete a primeira), e as outras com a face para cima. A segunda pessoa deve adivinhar a carta que está com a face para baixo. Prove que elas podem combinar um sistema que sempre torna isto possível.*

Problema 10. *Mostre que:* $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$

Problema 11. *(Putnam 1962) Mostre que:*

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Injeções, Sobrejeções e Bijeções

Problema 12. *Martín tem uma lista com todos os números naturais de 25 dígitos que se podem formar utilizando apenas os dígitos 1,2,3 e 4 e além disso que possuem igual quantidade de algarismos 1 e 2, por exemplo, 3333333333333333333333333, 1111111111114222222222222, etc. Jorge tem a lista de todos os números naturais de 50 dígitos formados por 25 digitos 1 e 25 dígitos 2. Demonstre que a lista de Martin tem a mesma quantidade de dígitos da lista de Jorge.*

Problema 13. *(Balcânica 1997) Sejam* m *e* n *inteiros maiores que 1. Seja* S *um conjunto com* n *elementos, e sejam* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *suconjuntos de* S*. Assuma que para quaisquer dois elementos* x *e* y *em* S*, existe um conjunto* A_i *tal que ou* x *está em* A_i *e* y *não está em* A_i *ou* x *não está em* A_i *e* y *está em* A_i*. Prove que* $n \leq 2^m$.

Problema 14. *Uma senha de banco consiste de um número de* 3 *dígitos pertencentes ao conjunto* $\{1, 2, \ldots, 8\}$*. Devido a um defeito no caixa eletrônico, a conta pode ser operada se acertarmos apenas dois dos* 3 *dígitos. Então a conta pode ser operada certamente após* 64 *tentativas. Qual o número mínimo de tentativas necessárias para podermos operar a conta?*