# O argumento do absurdo

Cícero Thiago B. Magalhães

**Introdução**

O argumento do absurdo é uma técnica simples de resolver problemas. O argumento consiste em assumir que a conclusão do problema não é verdadeira, e em seguida, obter um fato absurdo! Em seguida apresentarei alguns problemas que podem ser resolvidos usando esta técnica.

1. Prove que existem infinitos números primos.
**Solução**

Vamos supor que a sequência dos primos seja finita. Seja pois, $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ a lista de todos os primos. Consideramos o número $R = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n + 1$. É claro que $R$ não é divisível por nenhum dos $p_i$ de nossa lista e que $R$ é maior do que qualquer $p_i$. Mas sabemos que todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira (a menos de uma ordem) como um produto de fatores primos (*). Dessa maneira, $R$ é primo ou possui algum fator primo e isto implica na existência de um primo quenão pertence à lista. Portanto a sequência dos números primos não pode ser finita.
(*) *Teorema fundamental da aritmética*

2. Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.
**Solução**

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, que se tenha $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$, onde $p$ e $q$ são primos entre si, ou seja, a fração $\dfrac{p}{q}$ seja irredutível. Dessa maneira temos que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Da última equação fica fácil concluir que $p$ é par. Então coloquemos $p = 2k$ e teremos $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$, e pelo mesmo motivo acima, concluímos que $q$ é par, absurdo, pois inicialmente supusemos que $p$ e $q$ eram primos entre si. Logo, $\sqrt{2}$ nunca poderá ser escrito em forma de fração, dessa maneira concluímos a irracionalidade do $\sqrt{2}$.

3. Sejam $p$ e $q$ números primos ímpares consecutivos. Prove que $p + q$ é um produto de pelo menos 3 inteiros positivos maiores do que 1 (não necessariamente distintos). (Teste de seleção do Brasil para IMO)
**Solução**

Admita, sem perda de generalidade, que $p < q$. É fácil ver que o número 2 é um dos fatores, pois $p$ e $q$ são números ímpares. Agora suponha que exista apenas mais um fator $a$ e que ele seja primo. Assim,

$$p + q = 2a \Rightarrow a = \frac{p+q}{2}$$

Como $\dfrac{p+q}{2}$ é a média aritmética de dois números, conclui - se que $p < a < q$, absurdo, pois no enunciado é dito que $p$ e $q$ são primos ímpares **consecutivos**, não podendo existir um outro primo entre eles, assim concluímos que $a$ é composto, logo é produto de pelo menos dois inteiros.

4. Prove que

$$b^2 + b + 1 = a^2$$

não tem soluções inteiras e positivas.
**Solução**

Suponhamos que a equação do problema possua soluções inteiras e positivas. Se $b^2 + b + 1 = a^2$, então $b < a$, e $a^2 - b^2 = b + 1$. Fatorando a última equação temos que:

$$(a - b)(a + b) = b + 1 \ (*)$$

Sabendo que $a > b \geq 1$, nós temos que $a - b \geq 1$ e $a + b \geq 2 + b$, então o lado esquerdo de (*) é maior ou igual a $1 \cdot (b + 2)$, que é estritamente maior que o lado direito de (*). Isto é um absurdo, logo não existem inteiros positivos que satisfaçam a equação do problema.

5. Prove que a série harmônica diverge, ou seja, que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ cresce indefinidamente.
**Solução**

Admita que a série harmônica convirja para o número $r$, ou seja,

$$r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = r,$$

o que é um absurdo. Concluímos então que a série harmônica diverge.

**Exercícios**

1. Diz a lenda que o pirata Capitão Gancho participou de um terrível batalha na qual havia uma enorme quantidade de navios, todos de mesmo porte, lutando cada um por si, cada qual na tentativa de chegar sozinho a uma ilha onde havia um tesouro. Conta - se que, curiosamente, num dado instante, cada navio disparou um único tiro de canhão no navio mais próximo. Prove que, neste instante, nenhum navio foi atingido com mais de cinco tiros de canhão.

2. Há dez pontos marcados sobre uma circunferência, numerados de 1 a 10 em alguma ordem. Traçamos em seguida todos os segmentos que esses pontos determinam e os pintamos, uns de vermelho e os demais de azul. É possível, sem trocar as cores dos segmentos, reenumerar os pontos de 1 a 10 de modo que se dois números eram unidos por um segmento vermelho agora o sejam por um segmento azul e vice - versa? (Cone Sul)

3. Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a $216^o$. (OBM)

4. Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para a cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe - se que que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A? (OBM)
**Nota:** as distâncias entre as cidades são todas diferentes

5. Prove que as distâncias entre um ponto sobre um circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todas números racionais.

6. Um polígono convexo de 52 lados é dividido em 50 triângulos mediante diagonais que não intersectam no interior do polígono. Prove que é impossível que 25 destes triângulos tenham seus três lados formados apenas por diagonais do polígono.