Semana Olímpica 2014

Nivel 3: Coordenadas Baricêntricas.

Régis Prado Barbosa

Coordenadas Baricêntricas são um jeito diferente de fazer contas em problemas de geometria, mais exatamente de usa vetores. Essa técnica pode ser muito útil, por exemplo, em problemas que envolvam incentro, pois a fórmula do incentro em coordenadas baricêntricas é muito simples.

O que você precisa saber? Noções de vetores e geometria analítica.

1. Definição: As coordenadas bariêntricas definem as coordenadas dos pontos no plano baseado em três pontos fixados que serão os vértices do triângulo não-degenerado ABC. Desse modo, cada ponto ***P*** no plano será definido por $P = (x, y, z)$, com x, y, z reais, tais que:

$$\vec{P} = x.\vec{A} + y.\vec{B} + z.\vec{C} \quad \text{e} \quad x + y + z = 1$$

Outro jeito de ver estas coordenadas seria considerar as áreas direcionadas dos triângulos formados por P com os vértices do triângulo. Seria:

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[ABC]}, \frac{[PAB]}{[ABC]}\right)$$

Desse modo, se um ponto P está sobre o lado BC, então $[PBC] = 0$, $\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{PC}{BC}$ e $\frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{BP}{BC}$ (segmentos direcionados, ou seja, a razão será negativa se tiverem sentidos opostos).

2. Área: Dados três pontos no plano $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$ e $R = (x_3, y_3, z_3)$ a área do triângulo PQR é dada por:

$$[PQR] = [ABC].\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração: Consideremos uma base de geometria analítica para chegar a esta fórmula. Observe que:

$$P = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \vec{P} = x_1.\vec{A} + y_1.\vec{B} + z_1.\vec{C}$$

Então se considerarmos um sistema cartesiano de coordenadas teremos:

$$x_p = x_1.x_A + y_1.x_B + z_1.x_C \quad \text{e} \quad y_P = x_1.y_A + y_1.y_B + z_1.y_C$$

Siga o mesmo raciocínio para os outros pontos. Teremos por G.A.:

$$[PQR] = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1.x_A + y_1.x_B + z_1.x_C & x_1.y_A + y_1.y_B + z_1.y_C & 1 \\ x_2.x_A + y_2.x_B + z_2.x_C & x_2.y_A + y_2.y_B + z_2.y_C & 1 \\ x_3.x_A + y_3.x_B + z_3.x_C & x_3.y_A + y_3.y_B + z_3.y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow [PQR] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow [PQR] = [ABC].\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

■

2. Reta: Uma reta é definida pela equação $ux + vy + wz = 0$ onde u, v, w são reais.

Basta considerar dois pontos da reta e observar que o triângulo formado com um terceiro ponto (x, y, z) deve ter área zero.

2.1 Reta por um vértice: Se uma reta pelo ponto A terá equação dada por $y = k.z$, onde k é uma constante real.

Exercício: Com isso, já é possível provar os teoremas de Ceva e Menelaus.

3. Pontos Notáveis: Temos a seguir uma tabela com as equações de pontos notáveis do triângulo ABC usado como referência.

A partir daqui adotaremos uma notação alternativa que será muito útil. Temos:

$$P = (u:v:w) \Rightarrow P = \left(\frac{u}{u+v+w}, \frac{v}{u+v+w}, \frac{w}{u+v+w}\right)$$

Em alguns casos, não precisaremos normalizar, mas em outros será obrigatório. Por exemplo, a fórmula de área precisa das coordenadas normalizadas!

Tabela de pontos notáveis

Ponto Notável	**Em coordenadas baricêntricas**
Baricentro	$G = (1:1:1)$
Incentro	$I = (a:b:c)$
Ponto Simediano	$K = (a^2:b^2:c^2)$
Exincentro	$I_a = (-a:b:c);\ I_b = (a:-b:c);\ I_c = (a:b:-c)$
Ortocentro	$H = (tg\ A:tg\ B:tg\ C)$
Circuncentro	$O = (sen\ 2A:sen\ 2B:sen\ 2C)$
Nagel	$Na = (p-a:p-b:p-c)$
Gergonne	$Ge = ((p-b)(p-c):(p-a)(p-c):(p-a)(p-b))$

Obs: p representa o semiperímetro, ou seja, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Dependendo da necessidade cada uma das fórmulas pode ser normalizada e as fórmulas do ortocentro e do circuncentro podem postas em função dos lados.

Exercício: Prove a fórmula do ponto de Nagel e demonstre que o incentro, o baricentro e o ponto de Nagel são colineares para qualquer triângulo.

Exercício: Verifique as fórmulas do circuncentro e do ortocentro. Em seguida, mostre que baricentro, circuncentro e ortocentro são colineares.

4. Vetor Deslocamento: Considere a representação do vetor entre os pontos $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ dado por:

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

Agora para podermos prosseguir precisamos amarrar mais uma condição. Considere o ponto O como origem do sistema de vetores, ou seja, $\vec{O} = \vec{0}$. Assim, teremos os produtos escalares dados em função do circunraio R e dados lados:

$$\vec{A}.\vec{A} = R^2 \quad \text{e} \quad \vec{A}.\vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

5. Segmentos perpendiculares: Considere dois vetores deslocamento $\overrightarrow{MN} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2)$. Então $MN \perp PQ$ se, e somente se:

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0$$

Demonstração: Sabemos por vetores que:

$$MN \perp PQ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow \left(x_1.\vec{A} + y_1.\vec{B} + z_1.\vec{C}\right).\left(x_2.\vec{A} + y_2.\vec{B} + z_2.\vec{C}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cic} x_1.x_2.\vec{A}.\vec{A} + \sum_{cic}(x_1.y_2 + y_1.x_2).\vec{A}.\vec{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cic} x_1.x_2.R^2 + \sum_{cic}(x_1.y_2 + y_1.x_2).\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) - \frac{1}{2}\sum_{cic}(x_1.y_2 + y_1.x_2).c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cic}(x_1.y_2 + y_1.x_2).c^2 = 0$$

6. Distância entre dois pontos: Dado o vetor deslocamento $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$, sabemos que a distância entre os pontos P e Q é dada por:

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$$

7. Circunferência: A equação geral da circunferência é dada por:

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Onde u, v, w são reais.

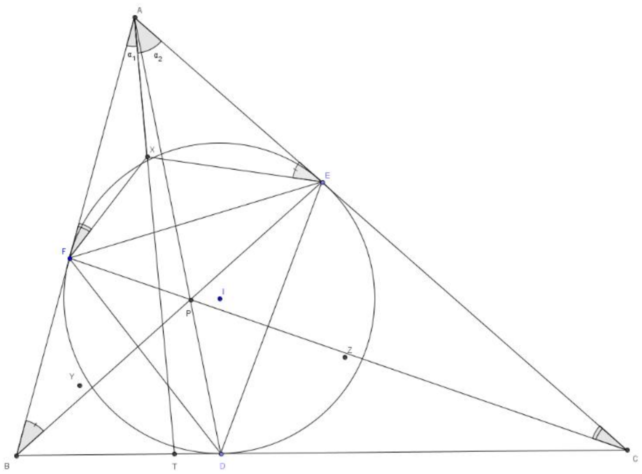
7.1 Circuncírculo: A equação da circunferência circunscrita é bem mais simples:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

Como todas as contas, você só pega o jeito praticando então vamos praticar...

Exemplo 1: (OBM 2013/6) O incírculo do triângulo *ABC* toca os lados *BC*, *CA* e *AB* nos pontos *D*, *E* e *F* respectivamente. Seja *P* o ponto de interseção das retas *AD* e *BE*. As reflexões de *P* em relação a *EF*, *FD* e *DE* são *X*, *Y* e *Z*, respectivamente. Prove que as retas *AX*, *BY* e *CZ* têm um ponto comum pertencente à reta *IO*, sendo *I* e *O* o incentro e o circuncentro do triângulo *ABC*.

Solução. Temos a seguinte figura, lembrando que CF também passa pelo ponto P, que é o ponto de Gergonne desse triângulo:



Seja $\alpha = \frac{A}{2}$, então sabemos que $\angle AFE = \angle AEF = 90° - \alpha$. Seja $\angle PFE = \angle XFE = x$, então:

$$\angle XFA = \angle FCA = 90° - \alpha - x$$

Analogamente, se $\angle PEF = \angle XEF = y$, então:

$$\angle XEA = \angle EBA = 90° - \alpha - y$$

Usando Ceva trigonométrico no triângulo ABC temos:

$$\frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} . \frac{sen\ 90° - \alpha - y}{sen\ y} . \frac{sen\ x}{sen\ 90° - \alpha - x} = 1\ (use\ lei\ dos\ senos\ nos\ \Delta CFE\ e\ \Delta BEF)$$

$$\Rightarrow \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} . \frac{EF}{BF} . \frac{CE}{EF} = 1 \Rightarrow \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} = \frac{p-b}{p-c}$$

Prolongue AX até tocar BC no ponto T, teremos com duas leis dos senos que:

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c}{b} . \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} = \frac{c.(p-b)}{b.(p-c)}$$

Então em coordenadas baricentricas teremos:

$$T = (0: b(p-c): c(p-b))$$

Então um ponto $R = (x: y: z)$ está sobre a reta AT se, e somente se,

$$\frac{z}{y} = \frac{c(p-b)}{b(p-c)}$$

Determinando os pontos análogos a T sobre os outros lados, podemos encontrar o ponto de encontro das cevianas AX, BY e CZ como sendo:

$$R = (a(p-b)(p-c) : (p-a)b(p-c) : (p-a)(p-b)c)$$

Bem agora, devemos provar que O, I e R são colineares. Usemos o critério de área:

$$[OIR] = 0 \Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} sen\ 2A & sen\ 2B & sen\ 2C \\ a & b & c \\ a(p-b)(p-c) & (p-a)b(p-c) & (p-a)(p-b)c \end{vmatrix} = 0$$

Veja que:

$$(p-b)(p-c) = \left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = \frac{a^2-(b-c)^2}{4} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4}$$

$$\Rightarrow (p-b)(p-c) = \frac{-2bc\cos A + 2bc}{4} \Rightarrow a(p-b)(p-c) = \frac{abc(1-cosA)}{2}$$

Temos assim:

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} sen\ 2A & sen\ 2B & sen\ 2C \\ sen\ A & sen\ B & sen\ C \\ 1-\cos A & 1-\cos B & 1-\cos C \end{vmatrix} = 0$$

Agora vamos para a porrada!

$$\begin{vmatrix} sen\ 2A & sen\ 2B & sen\ 2C \\ sen\ A & sen\ B & sen\ C \\ 1-\cos A & 1-\cos B & 1-\cos C \end{vmatrix} = (1-\cos A).(sen\ 2B.sen\ C - sen\ B.sen\ 2C) \ldots$$

$$= 2.sen^2\left(\frac{A}{2}\right).2.sen\ B.sen\ C.(\cos B - \cos C) \ldots$$

$$= 4.sen^2\left(\frac{A}{2}\right).sen\ B.sen\ C.2.sen\left(\frac{B-C}{2}\right).sen\left(\frac{B+C}{2}\right) \ldots$$

$$= 8.sen\ A.sen\ B.sen\ C.sen\left(\frac{A}{2}\right).sen\left(\frac{B-C}{2}\right) \ldots$$

$$= 8.sen\ A.sen\ B.sen\ C.cos\left(\frac{B+C}{2}\right).sen\left(\frac{B-C}{2}\right) \ldots$$

$$= 8.sen\ A.sen\ B.sen\ C.(sen\ B - sen\ C) \ldots$$

$$= 8.sen\ A.sen\ B.sen\ C.(sen\ B - sen\ C + sen\ C - sen\ A + sen\ A - sen\ B) = 0$$

$\blacksquare$

Agora é com vocês...

Problemas

1. (TCS 2013) Dado um triângulo escaleno ABC, sejam A', B', C' os pontos de interseção das bissetrizes internas de A, B, C com os lados opostos, respectivamente. Seja A'' a interseção entre BC e a mediatriz de AA'. Defina B'' e C'' de modo análogo. Mostre que A'', B'' e C'' são colineares.

2. Mostre que a área do triângulo OIH pode ser expressa por $\frac{1}{8r}(a-b)(b-c)(c-a)$.

3. Mostre que o conjugado isogonal do ponto de Nagel é o centro da homotetia positiva entre o incírculo e o circuncírculo. De modo análogo, prove que o conjugado isogonal do ponto de Gergonne é centro da homotetia negativa entre as duas circunferências.

4. (MOP 2006) O triângulo ABC está inscrito em uma circunferência ω. O ponto P está na reta BC tal que PA é tangente a ω. A bissetriz interna de $\angle APB$ corta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente. Os segmentos BE e CD se encontram no ponto Q. Dado que a reta PQ passa pelo centro de ω, calcule o ângulo $\angle BAC$.

5. (USAMO 2001) Seja ABC um triângulo e ω seu incírculo. Denote por D_1 e E_1 os pontos onde ω é tangente aos lados BC e AC, respectivamente. Denote por D_2 e E_2 os pontos sobre os lados BC e AC, respectivamente, tais que $CD_2 = BD_1$ e $CE_2 = AE_1$. Denote por P a interseção dos segmentos AD_2 e BE_2. A circunferência ω intersecta o segmento AD_2 em dois pontos, o mais próximo de A é chamado de Q. Prove que $AQ = D_2P$.

6. (Russia 2010) É possível que os quatro centros das circunferências inscritas nas faces de um tetraedro sejam coplanares?

7. (China TST 2012) Dado um triângulo escaleno ABC. Seu incírculo tangencia os lados BC, AC e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Sejam L, M e N os simétricos de D em relação a EF, de E em relação a FD e de F em relação a DE, respectivamente. Sabe-se que AL intersecta BC em P, a reta BM intersecta CA em Q e a reta CN intersecta AB em R. Prove que P, Q e R são colineares.