Olimpíada Brasileira de Matemática

X semana olímpica – 21 a 28 de janeiro de 2007

Eduardo Poço

Desigualdades – Nível II

Desigualdade do Rearranjo: sendo $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ reais e a seqüência (x_i) uma permutação de (b_i):

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais, temos:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2$$

$$\textit{Igualdade} \Leftrightarrow a_k = Cb_k,\ k = 1,2,\ldots,n$$

Generalizando: sendo $x_{i,j} \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$:

$$\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^m \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} x_{i,j}\right)^m$$

Desigualdade de Jensen: sendo $f : S \subset R \to R,$ com S um intervalo e $\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (função convexa) para $\forall a, b \in S$, então para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S,$ temos:

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n} \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$$

Vale também o análogo para funções côncavas, com troca de maior por menor. Podemos também usar pesos.

Generalizando: sendo $f : S \subset R^m \to R,$ S convexo, podemos considerar $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, para $\forall a, b \in S$, com *a* e *b* *m*-uplas ordenadas, e teremos o mesmo resultado, considerando as novas definições

Desigualdade das Médias: sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos e $\alpha > \beta$, temos:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$Igualdade \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$$

Podemos usar pesos também.

Desigualdade de Chebychev: para $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ seqüências crescentes, temos:

$$\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1}{n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \frac{b_1 + ... + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n}$$

Generalizando: sendo $x_{i,j}$, $1 \leq i \leq n,$ $1 \leq j \leq m$ reais positivos com $x_{i,j} \leq x_{i+1,j}, \forall j$, então temos:

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} x_{i,j}$$

Outros Truques

Resolver equação de segundo grau: quando podemos escrever uma desigualdade como função de segundo grau em uma das variáveis, é possível analisar a desigualdade como se as outras variáveis fossem parâmetros da função de segundo grau.

Abrir: a abertura de expressões pode ajudar a enxergar desigualdades.

Normalização: quando $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)?0 \Leftrightarrow f\left(kx_1, kx_2, ..., kx_n\right)?0$, com *k* uma constante e ? algum sinal de comparação, então podemos supor que a soma das variáveis é $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Verifique se as variáveis são livres para supor tal soma!

Problemas

1- Sejam *a, b, c, d* reais não negativos. Prove que:

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{b+c+d} \geq 3\sqrt{a+b+c+d}$$

2- Sejam *a*, *b*, *c* reais positivos. Prove que:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

3- Sejam *a*, *b*, *c* reais positivos. Prove que:

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{a^2+c^2}{2b} + \frac{b^2+c^2}{2a} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}$$

4- Sejam *x*, *y*, *z* reais. Prove que:

$$4x(x+y)(x+z)(x+y+z) + y^2z^2 \geq 0$$

5- Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos tais que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, $n \geq 2$. Prove que:

$$\frac{x_1}{2-x_1} + \frac{x_2}{2-x_2} + ... + \frac{x_n}{2-x_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

6- Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos tais que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, $n \geq 2$. Prove que:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

7- Sejam *a, b, c, d* reais não negativos. Prove que:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}\le\frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

8- Sejam *a, b, c, d* reais não negativos. Prove que:

$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\le 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

9- Sejam *x, y, z* reais positivos. Prove que:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+x)(y+z)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\le\frac{9}{4(x+y+z)}$$

10- Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos com soma igual a 1; $0<\alpha<\beta$ tais que $\beta x_1-\alpha x_2>0$, $\beta x_2-\alpha x_3>0$, ..., $\beta x_{n-1}-\alpha x_n>0$, $\beta x_n-\alpha x_1>0$. Prove que:

$$\frac{x_1^3}{\beta x_1-\alpha x_2}+\frac{x_2^3}{\beta x_2-\alpha x_3}+\ldots+\frac{x_n^3}{\beta x_n-\alpha x_1}\ge\frac{1}{n(\beta-\alpha)}$$

11- Sendo *n* um inteiro positivo, mostre que:

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

12- Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ reais positivos tais que:

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}}=1$$

Prove que:

$$x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}\ge n^{n+1}$$

Referências:

[1] Eureka! 5: Desigualdades Elementares
[2] Eureka! 23: Contas com Desigualdades