CAPÍTULO **1**

Desigualdades Geométricas

Os problemas de Geometria envolvendo desigualdades é um dos temas mais abordados nas olimpíadas, principalmente na prova da IMO. Antes de estudar este capítulo devemos ter um contato prévio com as desigualdades mais famosas.

1.1 Usando Geometria

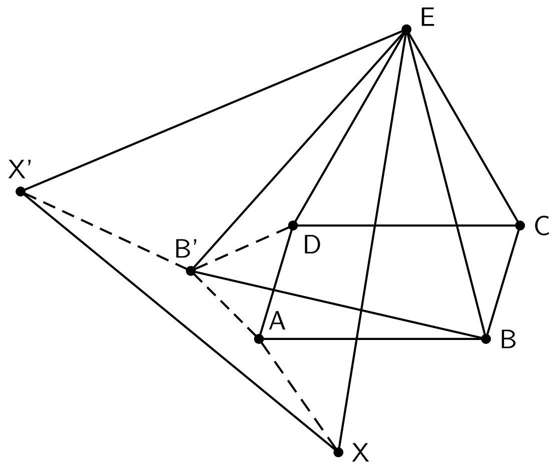
Alguns problemas de desigualdade geométricas podem ser resolvidos usando apenas propriedades geométricas, como a desigualdade triangular, usar o fato da hipotenusa ser maior que os catetos, o teorema de Euler ($R \geq 2r$) e a desigualdade de Ptolomeu. Mas muitas vezes uma transfomação com rotação ou reflexão é bastante útil. Observe:

Problema 1. (Bielorussia 1996) O triângulo equilátero DCE é construido externamente sobre o lado DC de um paralelogramo $ABCD$. Seja X um ponto arbitrário no plano. Prove que $XA + XB + AD \geq XE$.

Solução. Aplique uma rotação $R(E, -60^o)$. Sejam $X' = R(X)$ e $B' = R(B)$.

Como a rotação preserva segmentos, temos que $X'B' = XB$. Além disso, note que $D = R(C)$ logo temos que $DB' = CB = AD$. Mais ainda, como $\triangle EBC \equiv \triangle EDB'$ segue que $\angle B'DE = \angle DCB + 60^\circ$. Sabendo que $\angle ADC + \angle DCB = 180$, podemos ver que $\angle B'DA = 60^o$. Sabendo que $\angle ADC + \angle DCB = 180$, podemos ver que $\angle B'DA = 60^o$. Logo, o triângulo $B'AD$ é equilátero, então: $B'A = AD$. A partir daí podemos reescrever a desigualdade como:

$$XA + AB' + B'X' \geq XX'$$



Que é claramente verdadeira devido a desigualdade triangular. $\square$

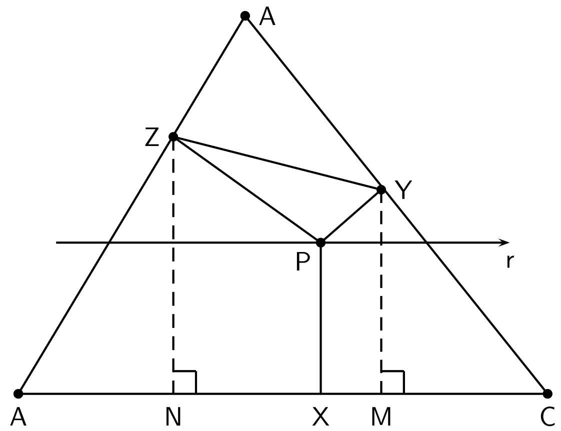
O próximo exemplo é conhecido como a desigualdade de Erdős-Mordell. Ela foi conjecturada por Erdős em 1935 e provada no mesmo ano pelo matemático Louis Mordell.

Ex: *Seja P um ponto no interior do triângulo ABC e sejam X, Y, Z os pés da perpendiculares de P aos lados BC, CA, AB respectivamente, então:*

$$PA + PB + PC \geq 2(PX + PY + PZ)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se ABC é equilátero e O é o seu centro.

Prova. Construa uma reta r paralela a BC e passando por P. E sejam M e N as projeções de Y e Z ao lado BC, respectivamente.



Note que o quadrilátero $AZPY$ é cíclico. Usando lei dos senos, temos que: $PA \cdot \operatorname{sen} A = YZ$. Agora note que $\angle PYM = \angle ACB$ logo, $PY \cdot \operatorname{sen} C = XM$. E de modo análogo podemos obter que $PZ \cdot \operatorname{sen} B = XN$. Por outro lado, NM é a projeção de ZY sobre BC assim, $NM \leq ZY$. Podemos reescrever essa desigualdade da seguite maneira:

$$PA \cdot \operatorname{sen} A \geq PY \cdot \operatorname{sen} C + PZ \cdot \operatorname{sen} B$$

Dividindo por $\operatorname{sen} A$ e aplicando a lei do senos, obtemos:

$$PA \geq PX \cdot \frac{AB}{AC} + PZ \cdot \frac{BC}{AC}$$

De modo análogo, podemos achar desigualdades similares para PB e PC. Somando essas três desigualdades, temos

$$PA+PB+PC \geq PX\left(\frac{CA}{AB}+\frac{AB}{CA}\right)+PY\left(\frac{AB}{BC}+\frac{BC}{AB}\right)+PZ\left(\frac{BC}{CA}+\frac{CA}{BC}\right)$$

Usando $MA \geq MG$, obtemos a desigualdade inicial. $\square$

1.2 Usando Algebra

Outra forma de resolver desigualdades geométricas é transformá-la em um problema de algebra. Podemos fazer isso calculando os fatores envolvidos na desigualdade em função de valores fixos da figura, como ângulos e medidas. Vamos ver como isso funciona:

Problema 2. (IMO 1991) Dado um triângulo ABC, seja I o incentro e A', B', C' os pontos de encontro das bissetrizes com os lados BC, CA, AB, respectivamente. Prove que:

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

Solução. Usando o teorema da bissetriz interna no triângulo $AA'B$, temos:

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{BA'}{AB} \Rightarrow \frac{IA'+IA}{IA} = \frac{BA'+AB}{AB} \Rightarrow \frac{AA'}{AI} = \frac{BA'+AB}{AB}$$

Agora sejam a, b, c as medidas dos lados do triângulo ABC. Usando o TBI no triângulo ABC, temos:

$$\frac{BA'}{a-BA'} = \frac{c}{b} \Rightarrow BA' = \frac{ac}{b+c}$$

Aplicando esse último fato na primeira equação, temos:

$$\frac{AA'}{AI} = \frac{\frac{ac}{b+c}+c}{c} \Rightarrow \frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}$$

Daí, a inequação inicial pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{4} < \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{c+a}{a+b+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \leq \frac{8}{27}$$

Fazendo a substituição:

$$x = \frac{-a+b+c}{a+b+c}, \quad y = \frac{a-b+c}{a+b+c}, \quad z = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

Além de $x+y+z=1$, a inequação fica da seguite forma:

$$2 < (1+x)(1+y)(1+z) \leq \frac{64}{27}$$

O lado esquerdo pode ser provado apenas efetuando a multiplicação, para o lado direito vamos usar $MA - MG$:

$$(1+x)(1+y)(1+z) \leq \left(\frac{(1+x)+(1+y)+(1+z)}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}.$$

□

Muitas vezes apenas Cauchy e MA-MG não resolvem o problema. Nesses casos devemos apelar para a desigualdade de Jensen.

Problema 3. (Irã 2004) No triângulo ABC seja C_a o circulo tangente a AB, AC e ao circuncírculo de ABC. Seja r_a o raio de C_a e r o inraio de ABC. Defina r_b e r_c de modo análogo. Prove que

$$r_a + r_b + r_c \geq 4r.$$

Solução. Sejam M e N a projeção de O_a sobre os lados AB e AC, respectivamente. Pelo teorema de Cansey na quádrupla (A, B, C_a, C), temos que:

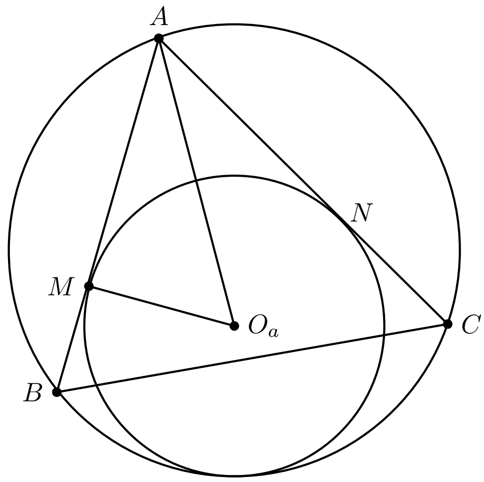
$$AB \cdot CN + BM \cdot AC = BC \cdot AM$$

Chamando $AM = AN = x$, $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, podemos reescrever a igualdade acima como:

$$c(b-x) + (c-x)b = a.x \Rightarrow x = \frac{2bc}{a+b+c}$$

Daí, do $\triangle AMO_a$ podemos tirar que:

$$r_a = \frac{\operatorname{tg}(\hat{A}/2) \cdot 2bc}{a+b+c}$$



Por outro lado, sabemos que:

$$p \cdot r = \frac{\operatorname{sen}(\hat{A})bc}{2} \Rightarrow \frac{r_a}{r} = \frac{1}{\cos^2(\hat{A}/2)}$$

Agora note que a função $f(x) = \cos^{-2}(x)$ é convexa. Desse modo, pelo teorema de Jensen, a desigualdade inicial é demonstrada. $\square$

1.3 Problemas Propostos

1. (IMO 1988) Considere um triângulo ABC retângulo em A, e D o pé da altura relativa ao lado BC. A reta ligando os incentros dos triângulos ABD e ACD corta os lados AB e AC em K e L, respectivamente. Mostre que $[ABC] \geq 2[AKL]$.

2. (IMO 1995) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ e $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Sejam G e H pontos no interior do hexágono tais que $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Prove que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

3. (Rioplatense 1999) Seja P um ponto sobre o diâmetro AB de um semicírculo Γ. Dois pontos M e N sobre Γ são tais que $\angle APM = \angle BPN = 60°$. E sejam r_1, r_2, r_3 os inraios dos triângulos curvilíneos APM, MPN, NPB, respectivamente. Mostre que:
$$r_1 + r_2 + r_3 \leq \frac{AB}{2}.$$

4. (Mediterrânea 2000) Os pontos P, Q, R, S são pontos médios dos lados BC, CD, DA, AB, respectivamente de um quadrilátero convexo $ABCD$. Prove que:
$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \leq 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2).$$

5. (Teste IMO USA) Seja P um ponto no interior do $\triangle ABC$ com circunraio R. Prove que:
$$\frac{PA}{BC^2}+\frac{PB}{AC^2}+\frac{PC}{AB^2}\geq\frac{1}{R}.$$

6. (Fortaleza 2002) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e D,E,F as intersecções das semi-retas $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$ e $\overrightarrow{CO}$ com os lados BC,CA,AB, respectivamente. Sendo R o circunraio do $\triangle ABC$, prove que:
$$\frac{1}{OD}+\frac{1}{OE}+\frac{1}{OF}\geq\frac{6}{R}.$$

7. (Coréia 1998.) Sejam D,E,F pontos sobre os lados BC,CA,AB, respectivamente do triângulo ABC. Sejam P,Q,R os segundos pontos de intersecção de AD,BE,CF com o circuncírculo do $\triangle ABC$. Mostre que:
$$\frac{AD}{PD}+\frac{BE}{QE}+\frac{CF}{RF}\geq 9.$$

8. (IMO 1996) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB\parallel DE$, $BC\parallel EF$ e $CD\parallel FA$. Sejam R_a,R_c,R_e os circunraios dos triângulos FAB,BCD,DEF e P o perímetro do hexágono. Prove que:
$$R_a+R_b+R_c\geq\frac{P}{2}.$$

9. (Fortaleza 2005) Seja ABC um triângulo acutângulo e, H e O o ortocentro e o circuncentro de ABC, respectivamente. Mostre que:
$$\frac{[AHB]}{[AOB]}+\frac{[BHC]}{[BOC]}+\frac{[CHA]}{[COA]}\geq 3.$$

10. (Rioplatense 2000) Em um triângulo ABC, sejam D,E,F pontos sobre os lados BC,CA,AB, respectivamente de modo que $[AFE]=[BFD]=[CDE]$. Mostre que:
$$\frac{[DEF]}{[ABC]}\geq\frac{1}{4}.$$

11. (Rússia 1994) Sejam a,b,c os lados de um triângulo, m_a,m_b,m_c as medianas e R o circunraio. Prove que:
$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\leq 12R.$$

12. Sejam a,b,c os comprimentos dos lados de um triângulo, p o semi-perímetro, e r o inraio. Mostre que:
$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2}.$$

13. (Aústria 1990) Em um quadrilátero convexo $ABCD$, seja E o ponto de encontro das suas diagonais. Mostre que:
$$\sqrt{[ABE]}+\sqrt{[CDE]}\leq\sqrt{[ABCD]}.$$

14. (Banco IMO 1996) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O e circunraio R. seja A' o ponto de intersecção de $\overrightarrow{AO}$ com o circuncírculo de BOC. defina B' e C' de modo análogo. Prove que:
$$OA'\cdot OB'\cdot OC'\geq 8R^3.$$

15. (Rússia 1996) Seja M a intersecção das diagonais de um quadrilátero cíclico, N a intersecção das retas que unem os pontos médios dos lados opostos, e O o circuncentro. Prove que $OM\geq ON$.

16. Sejam I o incentro do triângulo ABC, $A_1=AI\cap BC$ e $C_1=CI\cap AB$. Seja M um ponto arbitrário so segmento AC. As retas que passam por M e são paralelas a AA_1 e CC_1 encotram AA_1, CC_1, AB, BC nos pontos H, N, P, Q, respectivamente. Sejam $BC=a$, $AC=b$ e $AB=c$, e sejam d_1, d_2, d_3 as distâncias dos pontos H, I, N à reta PQ, respectivamente. Prove que:
$$\frac{d_1}{d_2}+\frac{d_2}{d_3}+\frac{d_3}{d_1}\geq\frac{2ab}{a^2+bc}+\frac{2ca}{c^2+ab}+\frac{2bc}{b^2+ca}.$$

17. (Turquia 2000) Um um triângulo acutângulo ABC com circunraio R, alturas AD, BE, CF com medidas h_1, h_2, h_3, respectivamente. Se t_1, t_2, t_3 são as medidas das tangentes partindo de A, B, C, respectivamente ao circuncírculo do triângulo DEF. Prove que:
$$\frac{t_1^2}{h_1}+\frac{t_2^2}{h_2}+\frac{t_3^2}{h_3}\leq\frac{3}{2}R.$$

18. (Coréia 2003) Suponha que o incírculo do $\triangle ABC$ é tangente aos lados AB, BC, CA nos pontos P, Q, R, respectivamente. Prove que:
$$\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\geq 6$$

19. (Czech-Slovak Match 1998) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB=BC$, $CD=DE$ e $EF=FA$. Mostre que:
$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}.$$