

# Diferenças finitas e o polinômio interpolador de Lagrange

Cícero Thiago B. Magalhães

19 de janeiro de 2014

## 1 Diferenças finitas

Seja  $P(x)$  um polinômio de grau  $m$ . Defina  $\Delta^{k+1}P(n) = \Delta^k P(n+1) - \Delta^k P(n)$ ,  $\forall k \geq 1$ , com  $\Delta^1 P(n) = P(n+1) - P(n)$ .

**Teorema 1.** Seja  $P(x)$  um polinômio de grau  $m$ , em que  $m > 0$ . Então  $\Delta^m P(n)$  é uma constante diferente de zero.

**Prova.**

Seja  $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio qualquer. Então

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) =$$

$$a_m(n+1)^m + a_{m-1}(n+1)^{m-1} + \dots + a_1(n+1) + a_0 - (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0).$$

É fácil ver que o grau de  $\Delta P(n)$  é  $m-1$  e seu termo de maior grau é  $a_m \binom{m}{1} n^{m-1}$ , pois  $a_m \neq 0$ .

Dessa forma, para  $k \leq m$ , o grau de  $\Delta^k P(n)$  é  $m-k$ . Portanto, quando  $k = m$  o grau de  $\Delta^m P(n)$  é 0, assim  $\Delta^m P(n)$  é uma constante diferente de zero.

**Problema 1.** Determine todos os polinômios  $P(x)$  tais que  $P(x+1) - P(x) = 2x+1$ ,  $\forall x$ .

**Solução.**

Temos que  $\Delta P(n) = 2n+1$ , assim  $\Delta^2 P(n) = \Delta P(n+1) - \Delta P(n) = 2(n+1)+1 - (2n+1) = 2$ . Como  $\Delta^2 P(n)$  é constante e diferente de zero então  $P(x)$  tem grau 2, ou seja,  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , assim

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x+1 \Leftrightarrow$$

$$2ax + a + b = 2x + 1, \forall x.$$

Dessa forma,  $2a = 2$  e  $a + b = 1$ . Portanto,  $a = 1$  e  $b = 0$  e  $P(x) = x^2 + c$ , para alguma constante  $c$ .

**Problema 2.** (AIME) Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_7$  números reais tais que

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1,$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12,$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123.$$

Determine o valor de  $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$ .

**Solução.**

Defina  $P(n) = (n+1)^2x_1 + (n+2)^2x_2 + (n+3)^2x_3 + \dots + (n+7)^2x_7$ . Temos que  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 12$ ,  $P(2) = 123$  e que  $P(n)$  é um polinômio quadrático. Desejamos calcular o valor de  $P(3)$ . Assim

$$\begin{aligned}\Delta P(0) &= P(1) - P(0) = 11, \\ \Delta P(1) &= P(2) - P(1) = 111, \\ \Delta^2 P(0) &= \Delta P(1) - \Delta P(0) = 100.\end{aligned}$$

Dessa forma,  $\Delta^2 P(n) = 100, \forall n$ . Assim,  $\Delta^2 P(1) = \Delta P(2) - \Delta P(1) \Leftrightarrow 100 = \Delta P(2) - 111 \Leftrightarrow \Delta P(2) = 211$ . Mas,  $\Delta P(2) = P(3) - P(2) \Leftrightarrow 211 = P(3) - 123 \Leftrightarrow P(3) = 334$ .

## 2 Polinômio interpolador de Lagrange

Vamos resolver um problema que serve de motivação para a construção do polinômio interpolador de Lagrange.

**Problema 3.** Determine um polinômio quadrático tal que  $P(-1) = -4$ ,  $P(1) = 2$  e  $P(2) = -1$ .

**Solução.**

Seja  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , então

$$P(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -4, \quad P(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \quad \text{e} \quad P(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -1.$$

Resolvendo o sistema linear encontramos  $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$ .

Resolver o sistema linear obtido pode ser muito trabalhoso e difícil se o grau do polinômio for grande. Para resolver problemas deste tipo e outros problemas vamos estudar o **polinômio interpolador de Lagrange**.

**Teorema 2.** Dados  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e  $b_0, b_1, \dots, b_n$  números complexos com  $a_0, a_1, \dots, a_n$  distintos, existe um único polinômio  $P(x)$ , de grau no máximo  $n$ , tal que

$$P(\alpha_i) = \beta_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

**Demonstração:**

Vamos inicialmente determinar o polinômio. Para isto, observe os polinômios

$$D_k(x) = \frac{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+1}) \dots (x - \alpha_n)}{(\alpha_k - \alpha_0)(\alpha_k - \alpha_1) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \dots (\alpha_k - \alpha_n)}$$

é fácil ver que

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Agora multiplique  $D_k(x)$  pelo número  $\beta_k$  e, então, adicione todos esses polinômios resultando no polinômio

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k D_k(x)$$

que satisfaz as condições do enunciado. Para demonstrar a unicidade sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois polinômios, que satisfazem as condições impostas. O polinômio  $H(x) = P_1(x) - P_2(x)$  tem grau no máximo  $n$  e possui  $n+1$  raízes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , portanto, é identicamente nulo.

Com isso,  $P_1(x) \equiv P_2(x)$ .

O polinômio  $D_k(x)$  não caiu do céu, então vamos ver a sua construção. Temos que

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Como  $D_k(\alpha_i) = 0$  para todo  $i \neq k$ , então

$$D_k(x) = C(x - \alpha_0) \dots (x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+1}) \dots (x - \alpha_n).$$

Para determinar o valor de  $C$  vamos substituir  $x = \alpha_k$  e usar a condição  $D_k(\alpha_k) = 1$ . Então,

$$1 = C(\alpha_k - \alpha_0) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \dots (\alpha_k - \alpha_n).$$

Portanto,

$$D_k(x) = \frac{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+1}) \dots (x - \alpha_n)}{(\alpha_k - \alpha_0)(\alpha_k - \alpha_1) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \dots (\alpha_k - \alpha_n)}.$$

**Problema 4.** (Mandelbrot) Seja  $P(x)$  um polinômio de grau 2 tal que  $P(0) = \cos^3 10^\circ$ ,  $P(1) = \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ$  e  $P(2) = 0$ . Determine  $P(3)$ .

**Solução.**

Usando o polinômio interpolador de Lagrange temos

$$P(x) = P(0) \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + P(1) \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + P(2) \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Como  $P(0) = \cos^3 10^\circ$ ,  $P(1) = \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ$  e  $P(2) = 0$  então

$$P(x) = \cos^3 10^\circ \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Queremos  $P(3)$  assim

$$P(3) = \cos^3 10^\circ \cdot \frac{(3-1)(3-2)}{(0-1)(0-2)} + \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \cdot \frac{(3-0)(3-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{(3-0)(3-1)}{(2-0)(2-1)} \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10^\circ \cdot 1 + \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \cdot (-3) \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ (1 - \cos^2 10^\circ) \Leftrightarrow$$

$$P(3) = 4 \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos 3 \cdot 10^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Problema 5.** (IMO Shortlist) Seja  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  e seja  $f$  um polinômio de grau 990 tal que  $f(k) = F_k$ ,  $k \in \{992, 993, \dots, 1982\}$ . Mostre que  $f(1983) = F_{1983} - 1$ .

**Solução.**

Temos que  $f(k+992) = F_{k+992}$ , para  $k = 0, 1, \dots, 990$  e precisamos provar que  $f(992+991) = F_{1983} - 1$ . Seja  $g(x) = f(x+992)$ , que também possui grau 990. Nosso novo problema é tal

que se  $g(k) = F_{k+992}$ , para  $k = 0, 1, \dots, 990$ , então  $g(991) = F_{1983} - 1$ . Usando o polinômio interpolador de Lagrange temos que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{990} g(k) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\dots(x-k+1)(x-k-1)\dots(x-990)}{(k-1)(k-2)\dots 1 \cdot (-1)\dots(k-990)}.$$

Então

$$g(991) = \sum_{k=0}^{990} g(k) \binom{991}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} F_{k+992} (-1)^k.$$

Sabemos que  $F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ , em que  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Assim,

$$\sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} F_{k+992} (-1)^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} a^{k+992} (-1)^k - \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} b^{k+992} (-1)^k \right].$$

Usando binômio de Newton temos que

$$\sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} a^{k+992} (-1)^k = a^{992} \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} (-a)^k = a^{992} [(1-a)^{991} + a^{991}].$$

Mas  $a^2 = a + 1$ , então

$$a^{992} [(1-a)^{991} + a^{991}] = a(a-a^2)^{991} + a^{1983} = -a + a^{1983}.$$

Temos que  $b^2 = b + 1$  então

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} F_{k+992} (-1)^k &= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{1983} - b^{1983} - a + b) \\ &= \frac{a^{1983} - b^{1983}}{\sqrt{5}} - \frac{a-b}{\sqrt{5}} = F_{1983} - 1. \end{aligned}$$

1. (AHSME) Determine o polinômio  $P$ , de menor grau possível, que satisfaz  $P(1) = 3$ ,  $P(2) = 7$ ,  $P(3) = 13$ ,  $P(4) = 21$  e  $P(5) = 31$ .
2. Um polinômio cúbico  $f(n)$  satisfaz  $f(0) = 5$ ,  $f(1) = 4$ ,  $f(2) = 17$  e  $f(3) = 56$ . Determine  $f(4)$ .
3. (AIME) A partir de uma sequência de números reais  $A = a_1, a_2, a_3, \dots$ , defina  $\Delta A$  como a sequência de números reais  $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ , em que o  $n$ -ésimo termo é  $a_{n+1} - a_n$ . Se todos os termos da sequência  $\Delta(\Delta A)$  são iguais a 1, e que  $a_{19} = a_{92} = 0$ , determine  $a_1$ .
4. Determine um polinômio de grau 3 tal que:
  - (a)  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 1$ ,  $P(3) = 4$  e  $P(4) = 3$ .
  - (b)  $P(1) = 1$ ,  $P(i) = 2$ ,  $P(-1) = 3$  e  $P(-i) = 4$ .
5. Se  $f$  é um polinômio de grau  $n$  tal que  $f(i) = 2^i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , determine  $f(n+1)$ .

6. Prove que se  $f(x)$  é um polinômio de grau  $n$  na variável  $x$ , então

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} \Delta f(0) + \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(0) + \dots + \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-n+1)}{n!} \Delta^n f(0),$$

em que  $\Delta f(0)$ ,  $\Delta^2 f(0)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta^n f(0)$  são obtidos a partir de  $\Delta^{k+1} f(n) = \Delta^k f(n+1) - \Delta^k f(n)$ ,  $\forall k \geq 1$ , com  $\Delta^1 f(n) = f(n+1) - f(n)$ .

7. (Mandelbrot) Se  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n$  tal que  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = -1$ ,  $P(2) = 1$ ,  $P(3) = -1$ ,  $\dots$ ,  $P(n) = (-1)^n$ . Determine  $P(n+1)$ .

8. (Mandelbrot) Se  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n$  com  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 3$ ,  $P(4) = 9$ ,  $\dots$  e  $P(2^n) = 3^n$ . Determine  $P(2^{n+1})$ .

9. (USAMO) Se  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n$  tal que  $P(k) = \frac{k}{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , determine  $P(n+1)$ .

10. (IMO Shortlist) Se  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n$  tal que  $P(i) = \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Determine  $P(n+1)$ .

11. Resolva o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 1 \\ bx_1 + b^2x_2 + b^3x_3 + b^4x_4 = 1 \\ cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + c^4x_4 = 1 \\ dx_1 + d^2x_2 + d^3x_3 + d^4x_4 = 1 \end{cases}$$

se  $a, b, c, d$  são reais não-nulos e distintos.

12. (Reino Unido) Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números inteiros positivos distintos. Prove que para qualquer inteiro positivo  $k$  o número  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$  é um inteiro.

13. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n \geq 2$ ,  $n$  números reais distintos no intervalo  $[-1, 1]$ . Prove que

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \geq 2^{n-2},$$

em que  $\prod_{j \neq i} |x_i - x_j|$ .

14. Prove que se  $m$  e  $n$  são inteiros,  $1 < m < n$ , então

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0.$$

15. Prove a identidade

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^{n+1} \binom{n}{k} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

16. Seja  $f \in \mathbb{R}[X]$  um polinômio de grau  $n$  com coeficiente líder igual a 1, e sejam  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  números inteiros. Prove que existe  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que

$$|f(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

17. (IMO Shortlist) Seja  $f$  um polinômio com coeficientes inteiros, e seja  $p$  um número primo tal que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  e  $f(k)$  é congruente a 0 ou 1 módulo  $p$ , para todo inteiro positivo  $k$ . Mostre que o grau de  $f$  é no mínimo  $p - 1$ .
18. (USAMO) Prove que qualquer polinômio mônico de grau  $n$ , com coeficientes reais, pode ser escrito como média aritmética de dois polinômios mônicos de grau  $n$  com  $n$  raízes reais cada.
19. Sejam  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$  números reais tais que  $b_i - a_j \neq 0$  para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Suponha que exista um único conjunto de números  $X_1, X_2, X_3, X_4$  tais que

$$\frac{X_1}{b_1 - a_1} + \frac{X_2}{b_1 - a_2} + \frac{X_3}{b_1 - a_3} + \frac{X_4}{b_1 - a_4} = 1.$$

$$\frac{X_1}{b_2 - a_1} + \frac{X_2}{b_2 - a_2} + \frac{X_3}{b_2 - a_3} + \frac{X_4}{b_2 - a_4} = 1.$$

$$\frac{X_1}{b_3 - a_1} + \frac{X_2}{b_3 - a_2} + \frac{X_3}{b_3 - a_3} + \frac{X_4}{b_3 - a_4} = 1.$$

$$\frac{X_1}{b_4 - a_1} + \frac{X_2}{b_4 - a_2} + \frac{X_3}{b_4 - a_3} + \frac{X_4}{b_4 - a_4} = 1.$$

Determine  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$  em função de  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ .

20. (Espanha) Sejam  $a, b$  e  $c$  números reais e seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tal que

$$\max\{|f(\pm 1)|, |f(0)|\} \leq 1.$$

Prove que se  $|x| \leq 1$  então  $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$  e  $|x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 2$ .

21. (ARML)  $f(x)$  é um polinômio de grau maior que 3. Se  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 3$  e  $f(3) = 5$ , determine o resto da divisão de  $f(x)$  por  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .

## Bibliografia

1. Problems from the book  
Titu Andreescu e Gabriel Dospinescu
2. Winning Solutions  
Edward Lozansky e Cecil Rousseau
3. The Mandelbrot Problem Book  
Sam Vandervelde
4. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II  
Serge Tabachnikov

5. Lagrange Interpolation Formula

Kin Y. Li

Mathematical Excalibur - July - September, 2010

6. A problem book in algebra

V. A. Krechmar

7. Straight from the book

Titu Andreescu e Gabriel Dospinescu.

8. Fifty lectures for American Mathematics Competitions, vol. 3

Jane, Yongcheng, Sam e Guiling Chen