

Divisibilidade e Conquista

Prof. Cícero Thiago B. Magalhães

Semana Olímpica - Fortaleza - 2008

1. Na minha calculadora, uma das teclas de 1 a 9 está com defeito. Ao pressioná-la aparece na tela um dígito entre 1 e 9 que não é o correspondente. Quando tentei escrever o número 987654321, apareceu na tela um número divisível por 11 e que deixa resto 3 ao ser dividido por 9. Qual a tecla defeituosa? Qual é o número que apareceu na tela? (Olimpíada de Maio)
2. Determine o único número inteiro N de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições:
 - (1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
 - (2) para todo inteiro positivo $n = 2, 3, 4, \dots, 9$, o número formado pelos n primeiros algarismos de N (da esquerda para a direita) é divisível por n .
3. Determinar o menor número inteiro positivo que termina em 56, é múltiplo de 56 e a soma de seus algarismos é 56.
4. Samuel e Larissa decidiram partilhar um tablete de chocolate que estava dividido em quadradinhos. Samuel é muito guloso e, na ausência de Larissa, comeu todos os quadradinhos do bordo do tablete, na esperança de que Larissa não notasse a diferença. Larissa não se deixou enganar e comeu os quadradinhos restantes. Sabendo que ambos comeram o mesmo número de quadradinhos, quantos quadradinhos podem ter o lado deste tipo de tablete?
5. Uma bolsa tem 101 bombons. Yuri e Davi disputam um jogo, jogando alternadamente um de cada vez (primeiro Yuri e depois Davi) eles retiram no mínimo 1 e no máximo 10 bombons da bolsa. Quando a mala esvaziar, eles irão contar a quantidade de bombons que cada um retirou da bolsa; se os números forem primos entre si, Yuri é o vencedor, do contrário, o vencedor será Davi. Quem irá vencer esse jogo e qual a estratégia usada?
6. Em uma escola de dança nós temos garotas dançando com garotos. No fim da noite, todas as garotas e todos os garotos foram questionados sobre a quantidade de músicas que dançaram (com um parceiro, é claro). Seis responderam que dançaram três músicas, um informou que dançou cinco músicas, quatro dançaram seis músicas, e um dançou nove. Prove que nem todas as respostas foram corretas.
7. Determine o maior e o menor número múltiplo de 6 formados por 9 alga-

rismos distintos. (Olimpíada Paulista/2001)

8. Um número natural de n algarismos é dito *harmonioso* se seus n algarismos são uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ e seus k primeiros algarismos formam um número divisível por k , para $k = 1, 2, \dots, n$. Por exemplo, 321 é harmonioso pois 3 é divisível por 1, 32 é divisível por 2 e 321 é divisível por 3. Quantos números harmoniosos de 6 algarismos existem? (Rioplatense/1992)

9. Determine o número natural n de quatro algarismos $abcd$ que seja múltiplo de 11, tal que o número de dois algarismos ac seja múltiplo de 7 e $a+b+c+d = d^2$.

10. Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações $\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \dots, \frac{91}{n+93}$ sejam todas irredutíveis. (Cone Sul/1999)

11. Determine todos os números de dois algarismos que são múltiplos da soma de seus algarismos. (Riolplatense/2002)

12. Um professor de matemática propõe a seguinte atividade para seus alunos: um aluno escreve no quadro uma fila com seis números inteiros; um segundo aluno escolhe três desses números, digamos x, y e z e os substitui por $x - y - z, 3x - 3y - 2z$ e $4x - 2y + 4z$, e escreve a nova fila abaixo da primeira, repetindo os números não substituídos. Repete - se o procedimento usando - se a última fila. Após a aula, o quadro é parcialmente apagado, restando legível o seguinte:

```
* * * * *
  1 2 3 4 5 6
* * * * *
* * * * *
  3 7 2 15 8 8
* * * * *
```

Prove que algum aluno errou suas contas. (OCM/1998)