

SEMANA OLÍMPICA 2007- NÍVEL 1 - DIVISIBILIDADE E RESTO

PROFESSOR ROBÉRIO BACELAR – aresuy@oi.com.br

1. Introdução

O assunto divisibilidade no Conjunto dos Inteiros (\mathbb{Z}) é extremamente importante para resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática (Teoria dos Números).

Quando falamos em “divisibilidade e resto”, pensamos logo que esse assunto é trivial, pois já foi visto na 5ª série. Mas não é bem assim, na realidade, esse tópico merece uma atenção mais profunda.

2. Divisibilidade

Definição

Sejam a e b dois inteiros, com $a \neq 0$, diz-se que a divide b , se, e somente se, existe um inteiro q tal que $b = a \cdot q$. Neste caso diz-se também que a é divisor de b e que b é múltiplo de a .

Indicaremos por $a \mid b$ o fato de a dividir b ; e se a não dividir b , escrevemos $a \nmid b$. Vejamos alguns exemplos:

1. $4 \mid 12$, pois $12 = 4 \cdot 3$
2. $-5 \mid 30$, pois $30 = -5 \cdot (-6)$
3. $7 \mid -21$, pois $-21 = 7 \cdot (-3)$
4. $3 \nmid 11$, pois não existe q inteiro tal que $11 = 3 \cdot q$

Para a relação $x \mid y$ nos inteiros valem as seguintes propriedades:

P₁: $a \mid a$, $\forall a \in \mathbb{Z}^*$, pois $a = 1 \cdot a$ (propriedade reflexiva)

P₂: se $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow |a| = |b|$. (propriedade anti-simétrica)

Demonstração:

De fato, por hipótese, $b = a \cdot q_1$ e $a = b \cdot q_2$. Daí, $b = b \cdot (q_2 \cdot q_1)$. Se $b \neq 0$, como $a = b \cdot q_2$, então $a \neq 0$, e se $b \neq 0$, então $q_2 \cdot q_1 = 1$ e portanto $|q_1| = |q_2| = 1$. Logo $|a| = |b|$ também nesse caso.

P₃: se $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (propriedade transitiva)

Demonstração:

Por hipótese, $b = a \cdot q_1$ e $c = b \cdot q_2$. Daí, $c = a \cdot (q_1 \cdot q_2)$ e portanto $a \mid c$.

P₄: se $a \mid b$ e $c \neq 0$, então $a \cdot c \mid b \cdot c$.

Demonstração:

De fato, por hipótese $b = a \cdot q$ e agora multiplique ambos os membros por c , vem:
 $b \cdot c = (a \cdot c) \cdot q$. Portanto, $a \cdot c \mid b \cdot c$.

Obs.: a recíproca da propriedade 4 também é verdadeira, ou seja, se $a.c \mid b.c \Rightarrow a \mid b$.
(Tente provar !)

P₅: se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b \pm c)$.

Demonstração:

Pela hipótese, $b = aq_1$ e $c = aq_2$. Daí subtraindo ou somando uma equação de outra, vem:

$(b \pm c) = a(q_1 \pm q_2)$. Portanto, $a \mid (b \pm c)$.

Critérios de Divisibilidade

Um inteiro qualquer diferente de zero, é divisível por:

- **2**, se for par. **Ex: 2.004;**
- **3**, se a soma dos seus algarismos for um numeral divisível por 3. **Ex: 123;**
- **4**, se o numeral formado pelos dois algarismos da direita for um divisível por 4. **Ex: 7.008;**
- **5**, se terminar em 0 ou 5. **Ex: 19.875;**
- **6**, se for divisível simultaneamente por 2 e 3. **Ex: 1.056;**
- **7**, retira-se o último algarismo da direita, em seguida subtrai-se do número que restou o dobro do algarismo retirado. Essa diferença tem que ser divisível por 7. **Ex: 343;**
Obs.: Não sendo notável a diferença, pode-se seguir várias vezes o mesmo processo.
- **8**, se o numeral formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8. **Ex: 123.016;**
- **9**, se a soma dos algarismos desse número for divisível por 9. **Ex: 9.234;**
- **10**, se terminar em 0. **Ex: 1.230;**
- **11**, se a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par for um número divisível por 11. **Ex: 72.897;**
- **12**, se for divisível simultaneamente por 3 e 4. **Ex: 11.580;**
- **13**, retira-se o último algarismo da direita, em seguida adiciona-se ao número que restou o quádruplo do algarismo retirado. Essa soma tem que ser divisível por 13. **Ex: 11.661;**
Obs.: Não sendo notável a soma, pode-se seguir várias vezes o mesmo processo.
- **14**, se for divisível simultaneamente por 2 e 7. **Ex: 3.612;**
- **15**, se for divisível simultaneamente por 3 e 5. **Ex: 13.455;**
- **21**, se for divisível simultaneamente por 3 e 7. **Ex: 16.548;**
- **22**, se ao mesmo tempo for divisível por 2 e 11. **Ex: 19.536;**
- **25**, quando terminar 00, 25, 50 ou 75. **Ex: 121.345.725.**

ALGORITMO DA DIVISÃO

Teorema

Se a e b são dois número inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem as condições:

$$a = b.q + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < b$$

Os elementos a , b , q e r são chamados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto da divisão de a por b .

Exemplo 1: Numa divisão o divisor é 4, ache os possíveis restos.

Solução: Como o divisor é 4, então $0 \leq \text{resto} < 4$. Daí, os possíveis restos são $\{0,1,2,3\}$.

Exemplo 2: Achar os números que, na divisão por 7, dão quociente igual ao resto.

Solução: Seja N um dos números procurados. Pelo algoritmo da divisão temos $N = 7 \cdot q + r$, com $0 \leq r < 7$. Fazendo $r = q$, temos $N = 8 \cdot q$, com $0 \leq q < 7$ e portanto os números são: 0, 8, 16, 24, 32, 40 e 48.

Restos das divisões

Na aplicação do caráter de divisibilidade, o resto da divisão de um número qualquer por outro, cujo caráter de divisibilidade conhecemos, será o mesmo resto encontrado na aplicação do caráter pelo divisor considerado.

Exemplo: Qual o resto da divisão de 1938 por 11?

Solução:

Soma dos algarismos de ordem ímpar = $9 + 8 = 17$

Soma dos algarismos de ordem par = $1 + 3 = 4$

$17 - 4 = 13$ e 13 dividido por 11 deixa resto 2.

Teoria dos restos

Proposição 1. O resto da divisão de uma soma por um número é o mesmo que o da divisão da soma dos restos das parcelas por esse mesmo número.

Exemplo: Qual o resto da divisão da soma $18 + 27 + 14$ por 4?

Solução:

Soma dos restos das parcelas: $2 + 3 + 2 = 7$ e 7 deixa resto 3 na divisão por 4. Portanto, o resto da soma de $18 + 27 + 14$ por 4 será 3.

Proposição 2. O resto da divisão de um produto por um número é o mesmo que o da divisão do produto dos restos dos fatores por esse número.

Exemplo: Qual o resto da divisão do produto $4735 \times 28624 \times 74652$ por 9?

Solução:

Produto dos restos dos fatores: $1 \times 4 \times 6 = 24$ e 24 deixa resto 6 na divisão por 9. Logo, o resto do produto $4735 \times 28624 \times 74652$ por 9 será 6.

NÚMEROS PRIMOS

Definição

Dizemos que um número inteiro positivo p maior que 1 é primo, se, e somente se, p possui exatamente dois divisores positivos distintos, ou seja, $\{1, p\}$. Exemplo: O número 2 é primo, pois os divisores positivos de 2 são $\{1, 2\}$. E mais, 2 é o único número primo par,

pois se existe primo par maior que 2, seria da forma $N = 2q$ ($q > 1$). Portanto, 1, 2 e q são divisores de N , o que torna absurdo, pois N é primo.

Proposição 1. O conjunto dos números primos é infinito.

Proposição 2. Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Teorema fundamental da aritmética

Todo inteiro positivo pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira.

Exemplo:

a) $2004 = 2^2 \times 3^1 \times 167^1$

b) $10.800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$

Proposição 3. Se um número $n > 1$ não é divisível por nenhum dos primos p menores ou iguais a \sqrt{n} , então n é primo.

Exemplo: O número 271 é primo ou composto?

Solução: Primeiro, observemos que $16 \leq \sqrt{271} < 17$. Os primos que não superam 16 são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Mas, nenhum deles divide 271. Logo, este número é primo.

Proposição 4. Seja N um inteiro positivo cuja forma fatorada é $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$, onde p_1, p_2, \dots, p_k são primos. A quantidade de divisores positivos de N é dada por $Q_D(N) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$.

Exemplo: Quantos divisores positivos possui o número 48 ?

Solução: Como $48 = 2^4 \times 3$, então $Q_D(48) = (4 + 1) \times (1 + 1) = 10$.

Proposição 5. Seja N um inteiro positivo, cuja forma fatorada é $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$, onde p_1, p_2, \dots, p_k são primos. A soma dos divisores positivos de N é dada por $S_D(N) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \dots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.

Exemplo: Ache a soma dos divisores positivos do número 90?

Solução: Fatorando temos $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, então

$$S_D(90) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \times \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 3 \times 13 \times 6 = 234.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS (MARAVILHAS!!!)

1. Determinar os números inteiros positivos que , divididos por 17, dão o resto igual ao quadrado do quociente.
2. Calcular o número de divisores positivos do produto $P = 9 \times 42 \times 24$.
3. Encontre o valor da soma dos divisores positivos comuns entre 240 e 360.
4. Mostrar que, se a soma de dois inteiros quaisquer é divisível por 2, então a sua diferença também é divisível por 2.
5. Mostrar que, se $n^2 + 1$ é divisível por $n + 1$, então $n = 1$.
6. Mostrar que a expressão $10^n \times (an - 1) + 1$ é divisível por 9, qualquer que seja o inteiro positivo n .
7. Sendo n um inteiro positivo, mostrar que $665 | (9^{3n} - 8^{2n})$.
8. Mostrar que o inteiro $N = 2^{48} - 1$ é divisível por dois inteiros compreendidos entre 60 e 70.
9. Achar o resto da divisão de 6^{2002} por 10.
10. Um número dividido por 5 deixa resto 3 e dividido por 9 deixa resto 4. Determinar o resto da divisão deste número pelo produto 5×9 .
11. Encontre o resto da divisão de 4^{555} por 10.
12. Determinar o resto da divisão por 3 da soma: $34 + 2487 + 36427 + 6123134$, sem efetuar-la.
13. Determinar o resto da divisão por 8 do produto: $9428 \times 7613 \times 36249$, sem efetuar-lo.
14. Determinar os restos das divisões por 5 e por 9, da expressão: $215378 \times 27274 + 35826 \times 1327$.
15. Um número a dividido por 11 dá resto 2 e b é um número que, dividido pelo mesmo divisor, deixa resto 3. Calcular o menor número que se deve subtrair de $a^3 + b^2$ para se obter um múltiplo de 11.
16. Achar os valores do inteiro n para os quais a fração $\frac{n+2}{n-1}$ represente um inteiro.
17. Diga, justificando, se a igualdade $3^{10} + 7^{100} = 8^{100}$ é verdadeira.
18. Calcular o resto da divisão por 11 da expressão: $8291^3 + 7282 \times 9372^2 + 8193^4$.

Um forte abraço olímpico!