

Divisibilidade e Resto

Diego Eloi

13 de janeiro de 2015

A divisibilidade é, provavelmente, um dos assuntos mais visto pelos alunos dos níveis 1/2, devido a quantidade de problemas que caem em olimpíadas sobre isso. O que veremos aqui é mais um formalização dos conceitos que já foram estudados. Dizemos que um inteiro não-nulo a *divide* um inteiro positivo b , e escrevemos $a|b$ quando b for um múltiplo de a , ou seja, quando a for um divisor de b . Em outras palavras, $a|b \iff \exists c \in \mathbb{Z}/b = a.c$.

Exemplos: $3|18$, pois $18 = 3.8$
 $4|36$, pois $36 = 4.9$
 8 não divide 12 , pois não existe nenhum inteiro c tal que $8c = 12$.
 4 não divide 2 , pois não existe nenhum inteiro c tal que $4c = 2$.

Existem algumas propriedades importantes de divisibilidade:

- (i) Se $a|b$, então $a \leq b$;
- (ii) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b + c$;
- (iii) Se $a|b$, então $a|b.c$, para qualquer $c \in \mathbb{Z}$;
- (iv) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;
- (v) Se p é um número primo e $p|ab$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$, então $p|a$ ou $p|b$.

Observações: Juntando as propriedades (ii) e (iii), vemos que se $a|b$ e $a|c$, então $a|bx + cy$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$. Alguns problemas sobre divisibilidade vem disfarçados, pois quando se pergunta quando a fração $\frac{a}{b}$ é um inteiro é o mesmo que perguntar quando $a|b$.

Problema 1 Qual é o maior inteiro positivo n tal que $n + 10|n^3 + 100$?

Problema 2 Mostre que se $7|3a + 2b$, então $7|4a - 2b$.

Problema 3 Mostre que se $3|a + 7b$, então $3|a + b$.

Problema 4 Mostre que se $19|3x + 7y$ então $19|43x + 75y$.

Problema 5 Quantos são os inteiros positivos n tais que $n + 3|n^3 + 7$?

Problema 6 Prove que não existe nenhum inteiro tal que $4|n^2 + 2$.

Problema 7 Qual é o resto que uma potência ímpar de 2 deixa por 3?

Problema 8 Quais restos são possíveis na divisão de $n^3 + 2n$ por 3?

Problema 9 Encontre todos os n inteiros tais que $n + 3|n^2 + 6n + 24$.

Problema 10 Qual o resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131}$ por 12?

Problema 11 Qual o resto da divisão de $7^{49} + 8^{64} + 9^{81}$ por 5?

Problema 12 (OCM/95) Prove que o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é divisível por 5.

Problema 13 Determine o último algarismo da soma $1^2 + 2^2 + \dots + 2015^2$.

Problema 14 Determine o último algarismo da soma $1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \dots + 2014^{2015} + 2015^{2015}$.