POTÊNCIA DE PONTO, EIXO RADICAL, CENTRO RADICAL E APLICAÇÕES

Yuri Gomes Lima, Fortaleza - CE

♦ Nível 2

INTRODUÇÃO

Muitas vezes na Geometria Plana nos deparamos com problemas em que não temos muitas informações a respeito de ângulos e comprimentos, de modo que soluções analíticas se tornam praticamente inviáveis. Em alguns desses casos, a utilização de ferramentas como potência de ponto, eixo radical e centro radical, quando não resolvem o problema, facilitam em muito sua resolução e a tornam pequena e extremamente simples. Nesse artigo, tentaremos tornar o leitor familiar com tais ferramentas, em especial com a segunda.

A partir de agora, estaremos sempre trabalhando em um plano π e representaremos uma circunferência Γ de centro O e raio r por $\Gamma = \Gamma(O;r)$.

1. Potência de Ponto

Definição: (Potência de Ponto) Seja dada uma circunferência $\Gamma(O;r)$ e um ponto A do plano π. Definimos a potência de ponto de A em relação a Γ como

$$Pot_\Gamma(A) = OA^2 - r^2$$

Proposição:

(a) $A \in \Gamma \Leftrightarrow Pot_\Gamma(A) = 0$.

(b) Se A está no interior de Γ e BC é uma corda de Γ que contém A, então $Pot_\Gamma(A) = -BA.AC$.

(c) Se A está no exterior de Γ e l é uma reta que passa por A e intersecta Γ em B e C, então $Pot_\Gamma(A) = AB.AC$.

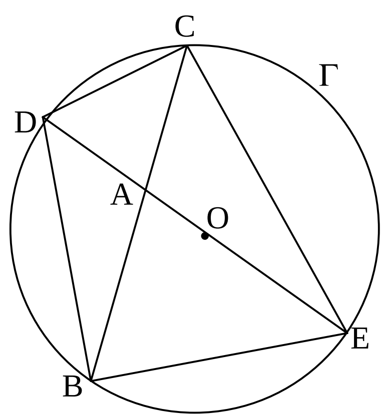

Figura 1.1

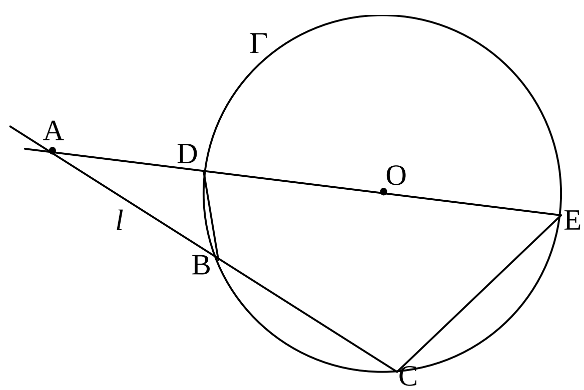

Figura 1.2

Dem: (a) $A \in \Gamma \Leftrightarrow OA = r \Leftrightarrow Pot_\Gamma(A) = 0$.

(b) Se $AO \cap \Gamma = \{D, E\}$, então $BDCE$ é inscritível. Logo $\Delta ABE \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{BA}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow BA.AC = AE.AD = (r + OA)(r - OA) = r^2 - OA^2 \Rightarrow Pot_\Gamma(A) = -BA.AC$.

(c) De modo semelhante a (b), $\Delta ABD \sim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = (AO+r)(AO-r) \Rightarrow Pot_{\Gamma}(A) = AB.AC$.

Decorre da proposição acima que se l é tangente a Γ, então B≡C, de modo que $Pot_{\Gamma}(A) = AB^2$.

Problema 1: (Balcânica 1986) Uma reta passando pelo incentro I do triângulo ABC intersecta a circunferência circunscrita $\Gamma_1(O;R)$ de ABC nos pontos F e G, e o incírculo $\Gamma_2(I;r)$ nos pontos D e E, com D entre I e F. Prove que $DF.EG \geq r^2$. Quando há igualdade?

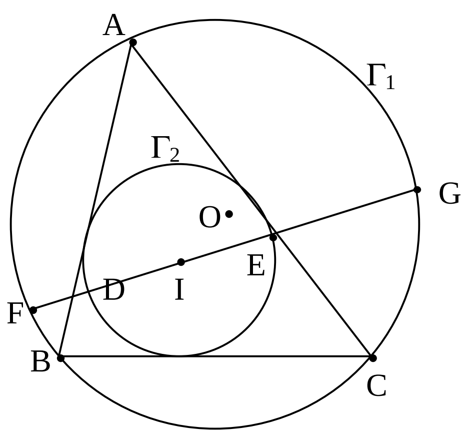

Figura 1.3.

Solução:
$DF.EG = (FI - DI)(GI - EI) = (FI - r)(GI - r) = FI.GI - (FI + GI)r + r^2 = -Pot_{\Gamma_1}(I) - FG.r + r^2$. Pela relação de Euler (Apêndice 1), temos que $OI^2 = R^2 - 2Rr$, e assim $Pot_{\Gamma_1}(I) = OI^2 - R^2 = -2Rr$. Queremos mostrar então que $2Rr - FG.r + r^2 \geq r^2 \Leftrightarrow 2Rr \geq FG.r \Leftrightarrow 2R \geq FG$, que é verdade, pois FG é corda de Γ_1.

A igualdade ocorre se e só se FG é diâmetro de Γ_1.

Problema 2: (Teste para Ibero 2002 – Brasil) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ_1, P o ponto de interseção das diagonais AC e BD e M o médio de CD. A circunferência Γ_2 que passa por P e é tangente a CD em M corta BD e AC nos pontos Q e R, respectivamente. Seja S o ponto do segmento BD tal que $BS = DQ$. A paralela a AB por S corta AC em T. Prove $AT = CR$.

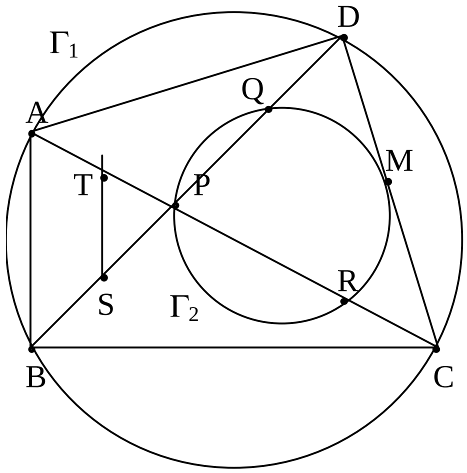

Figura 1.4.

Solução:

$$\begin{cases} Pot_{\Gamma_2}(D) = DM^2 = DQ.DP \\ Pot_{\Gamma_2}(C) = CM^2 = CR.CP \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DQ.DP = CR.CP \Rightarrow \frac{DQ}{CR} = \frac{CP}{DP}.$$

Logo, como $BS = DQ$, temos

$AT = CR \Leftrightarrow \dfrac{BS}{AT} = \dfrac{CP}{DP}$. Ora, $-CP.AP =$

$= Pot_{\Gamma_1}(P) = -DP.BP \Rightarrow \dfrac{CP}{DP} = \dfrac{BP}{AP}$. Mas

$AB // TS \Rightarrow \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{BS}{AT}$, e assim

$\dfrac{BS}{AT} = \dfrac{CP}{DP}$.

2. Eixo Radical

Definição: (Eixo Radical) Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências não concêntricas. O eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é o lugar geométrico dos pontos P tais que

$$Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P).$$

Teorema: O eixo radical de duas circunferências é sempre uma reta perpendicular ao segmento que une os centros das duas circunferências.

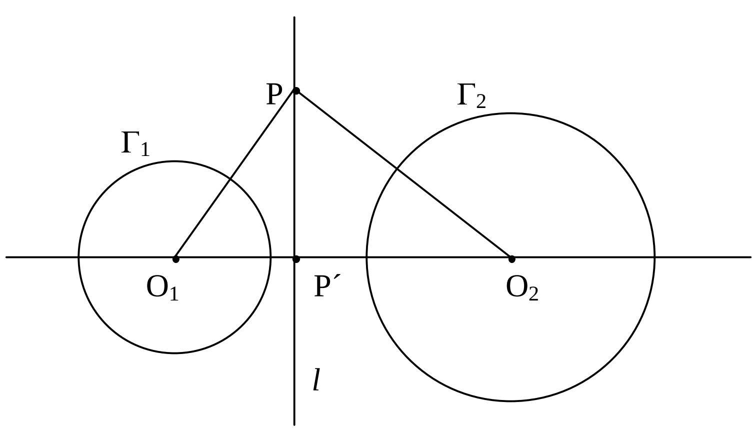

Figura 2.1.

Dem: Sejam $\Gamma_1(O_1;r_1)$ e $\Gamma_2(O_2;r_2)$ as circunferências. Vamos mostrar que a projeção P' de todo ponto P do eixo radical sobre O_1O_2 é constante. De fato:

$$\begin{cases} O_1P^2 = O_1P'^2 + PP'^2 \\ O_2P^2 = O_2P'^2 + PP'^2 \end{cases} \Rightarrow O_1P^2 - O_2P^2 = O_1P'^2 - O_2P'^2 \Rightarrow$$

$$O_1P'^2 - (O_1O_2 - O_1P')^2 = (Pot_{\Gamma_1}(P) + r_1^2) - (Pot_{\Gamma_2}(P) + r_2^2) \Rightarrow$$

$$2O_1O_2.O_1P' - O_1O_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \Rightarrow O_1P' = \frac{r_1^2 - r_2^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2}, \text{ constante. } (*)$$

Assim, o eixo radical Γ_1 e Γ_2 está contido na reta l perpendicular a O_1O_2 passando por $P' \in O_1O_2$ satisfazendo (*). Falta mostrar que todo ponto dessa reta pertence ao eixo radical. Seja então $P \in l$. Logo, P' satisfaz (*), e daí

$$O_1P^2 = PP'^2 + \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2}\right)^2 \Rightarrow Pot_{\Gamma_1}(P) = PP'^2 + \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2}\right)^2 - r_1^2$$

Além disso, $O_2P' = O_1O_2 - \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2} = \dfrac{r_2^2 - r_1^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2} \Rightarrow$

$$O_2P^2 = PP'^2 + \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2}\right)^2 \Rightarrow Pot_{\Gamma_2}(P) = PP'^2 + \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2}\right)^2 - r_2^2$$

Deixamos para o leitor verificar que os valores encontrados para $Pot_{\Gamma_1}(P)$ e $Pot_{\Gamma_2}(P)$ são iguais. Assim, o resultado segue.

Abaixo estão duas possíveis posições de Γ_1 e Γ_2, juntamente com os respectivos eixos radicais.

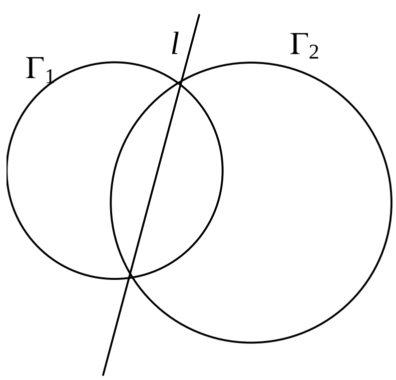

Figura 2.2.

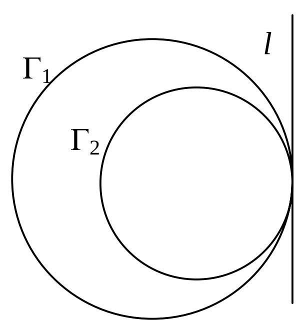

Figura 2.3.

A partir da observação feita após a Proposição da Seção 1, temos a seguinte definição equivalente para o eixo radical, nos casos em que Γ_1 e Γ_2 se intersectam em no máximo um ponto.

Definição Equivalente (Eixo Radical) O eixo radical de duas circunferências Γ_1 e Γ_2 que se intersectam em no máximo um ponto é o lugar geométrico dos pontos P tais que as tangentes de P a Γ_1 e Γ_2 têm o mesmo comprimento.

Problema 3: (Banco da Cone-Sul 2002) Seja *ABCD* um quadrilátero inscritível e *E* a interseção das diagonais *AC* e *BD*. Se *F* é um ponto qualquer e as circunferências Γ_1 e Γ_2 circunscritas a *FAC* e a *FBD* se intersectam novamente em *G*, mostre que *E*, *F*, *G* são colineares.

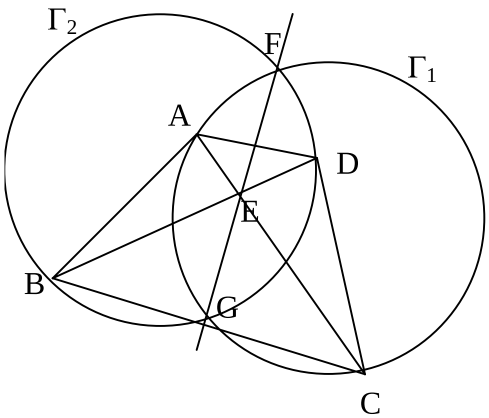

Figura 2.4.

Solução: O eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é a reta *FG*. Então $E \in FG \Leftrightarrow Pot_{\Gamma_1}(E) = Pot_{\Gamma_2}(E)$. Mas *ABCD* inscritível implica $Pot_{\Gamma_1}(E) =$ $= -AE.EC = -BE.ED = Pot_{\Gamma_2}(E)$, e portanto *E*, *F*, *G* são colineares.

Vamos ver agora uma aplicação da Definição Equivalente de Eixo Radical:

Problema 4: Se a distância entre os centros de duas circunferências Γ_1 e Γ_2 é maior do que a soma de seus raios, as circunferências têm quatro tangentes em comum. Prove que os pontos médios desses quatro segmentos são colineares.

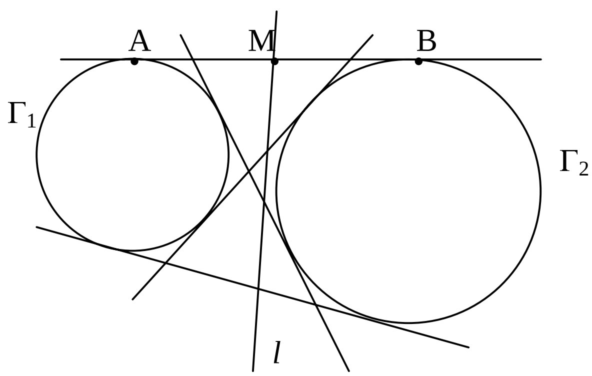

Figura 2.5.

Solução: A condição do problema garante que a posição relativa de Γ_1 e Γ_2 é a da Figura 2.5. Vamos mostrar que cada um dos pontos médios está no eixo radical de Γ_1 e Γ_2. De fato, se *M* é o médio de alguma dessas tangentes *AB*, então $MA = MB$. Pela Definição Equivalente de Eixo Radical, temos que *M* está no eixo radical de Γ_1 e Γ_2. Como o mesmo vale para os outros pontos médios, concluímos que os quatro pontos são colineares.

3. Centro Radical

Definição (Centro Radical) Sejam dadas três circunferências Γ_1, Γ_2 e Γ_3 não concêntricas. Então os eixos radicais dessas circunferências tomadas duas a duas são paralelos ou são concorrentes. Quando são concorrentes, a interseção O é o único ponto P do plano tal que

$$Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P) = Pot_{\Gamma_3}(P).$$

Tal ponto é chamado de centro radical das circunferências Γ_1, Γ_2 e Γ_3.

Dem: De fato, sejam l_1, l_2 e l_3 os eixos radicais de Γ_2 e Γ_3, Γ_1 e Γ_3 e Γ_1 e Γ_2, respectivamente. Pelo Teorema da Seção 2, $O_2O_3 \perp l_1$, $O_1O_3 \perp l_2$ e $O_1O_2 \perp l_3$. Logo, se duas dessas retas são paralelas (suponha, sem perda de generalidade, $l_1 // l_2$), então $O_2O_3 // O_1O_3 \Rightarrow$ O_1, O_2 e O_3 são colineares. Logo, l_3 também é paralela a l_1 e a l_2.

Suponha agora que l_1, l_2 e l_3 são duas a duas concorrentes. Seja O a interseção l_1 e l_2. Então $Pot_{\Gamma_2}(O) = Pot_{\Gamma_3}(O)$ e $Pot_{\Gamma_1}(O) = Pot_{\Gamma_3}(O)$. Segue que $Pot_{\Gamma_1}(O) = Pot_{\Gamma_2}(O) \Rightarrow O \in l_3$, donde l_1, l_2 e l_3 são concorrentes. Como três retas não paralelas se intersectam em no máximo um ponto, O é único.

Problema 5: (USAMO 1997) Seja *ABC* um triângulo. Construa triângulos isósceles *BCD*, *CAE* e *ABF* externamente a *ABC* de bases *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente. Prove que as retas que passam por *A*, *B*, *C* e são perpendiculares a *EF*, *FD* e *DE*, respectivamente, são concorrentes.

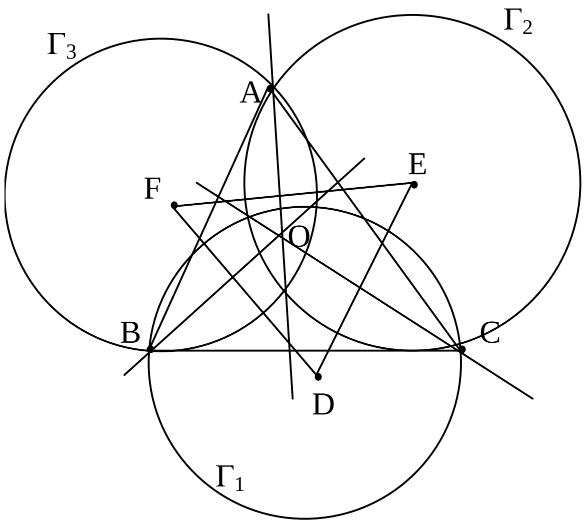

Figura 2.6.

Solução: Sejam $\Gamma_1 = \Gamma_1(D; DB)$, $\Gamma_2 = \Gamma_2(E; EC)$ e $\Gamma_3 = \Gamma_3(F; FA)$. Então, $B, C \in \Gamma_1$, $A, C \in \Gamma_2$ e $A, B \in \Gamma_3$. Logo, a reta que passa por A e é perpendicular a EF é o eixo radical de Γ_2 e Γ_3. De modo análogo com B e C, como os centros de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 não são colineares, concluímos que as três retas se intersectam no centro radical O de Γ_1, Γ_2 e Γ_3, como queríamos.

Problema 6: (USAMO 1990) Um triângulo acutângulo *ABC* é dado no plano. O círculo com diâmetro *AB* intersecta a altura *CC´*e seu prolongamento nos pontos *M* e *N*, e o círculo com diâmetro *AC* intersecta a altura *BB´* e seu prolongamento em *P* e *Q*. Mostre que os pontos *M, N, P, Q* são concíclicos.

Às vezes, quando queremos mostrar que três retas são concorrentes e já sabemos que uma delas é o eixo radical de duas circunferências Γ_1 e Γ_2, basta acharmos outra circunferência Γ_3 tal que as outras duas retas são eixos radicais Γ_1 e Γ_3 e de Γ_2 e Γ_3. Para acharmos Γ_3, geralmente devemos mostrar que algum quadrilátero é inscritível. Vamos ver como isso funciona no

Problema 7: (IMO 1995) Sejam *A*, *B*, *C*, *D* pontos distintos em uma reta, nesta ordem. As circunferências Γ_1 e Γ_2 de diâmetros *AC* e *BD* se intersectam em *X* e *Y*.*O* é um ponto arbitrário da reta *XY*, não situado em *AD*. *CO* intersecta Γ_1 novamente em *M*, e *BO* intersecta Γ_2 novamente em *N*. Prove que *AM*, *DN* e *XY* são concorrentes.

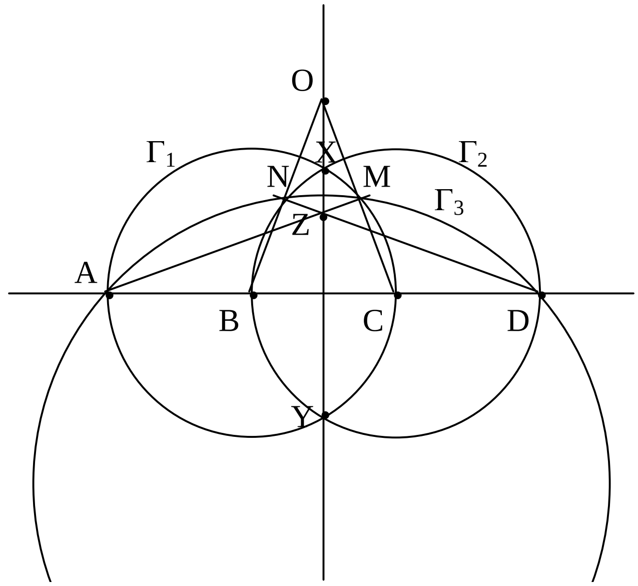

Figura 2.7.

Solução: Vamos mostrar que *AMND* é inscritível. De fato, como $O \in XY$ e *XY* é o eixo radical de Γ_1 e Γ_2, temos que $Pot_{\Gamma_1}(O) = Pot_{\Gamma_2}(O)$, donde $ON.OB = OM.OC \Rightarrow$ *BCMN* inscritível $\Rightarrow$ $\angle MNO = \angle BCM$. Assim, $\angle DNM = 90° - \angle MNO = 90° - \angle BCM = \angle DAM \Rightarrow$ $\angle DNM = \angle DAM \Rightarrow$ *ADMN* inscritível..

Seja então Γ_3 a circunferência circunscrita a *ADMN*. Então:

AM é o eixo radical de Γ_1 e Γ_3

DN é o eixo radical de Γ_2 e Γ_3 $\Rightarrow$ *AM*, *DN* e *XY* são concorrentes no centro radical Z de Γ_1,

XY é o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 $\quad$ Γ_2 e Γ_3. □

Exercícios Propostos:

8. (Ibero 1999) Um triângulo acutângulo *ABC* está inscrito numa circunferência de centro *O*. As alturas do triângulo são *AD*, *BE* e *CF*. A reta *EF* intersecta a circunferência em *P* e *Q*.

(a) Prove que *AO* é perpendicular a *PQ*.

(b) Se *M* é o ponto médio de *BC*, prove que

$$AP^2 = 2.AD.OM\ .$$

9. Sejam $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ duas circunferências. Mostre que o lugar geométrico dos pontos *P* tais que $PO_1^{\ 2} + r_1^{\ 2} = PO_2^{\ 2} + r_2^{\ 2}$ é uma reta simétrica ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 em relação ao ponto médio de O_1O_2.

(Dica: tomando o simétrico a um ponto do eixo radical em relação à reta mediatriz de O_1O_2, a equação acima é satisfeita?)

10. (Ibero 1999) Dadas duas circunferências M e N, dizemos que M bisecta N se a corda comum a M e N é um diâmetro de N. Considere duas circunferências fixas C_1 e C_2 não concêntricas.

(a) Prove que existem infinitas circunferências B tais que B bisecta C_1 e C_2.

(b) Determine o lugar geométrico dos centros de B.

(Dica para o item (b): use o problema 10)

11. (Índia) Seja *ABCD* um paralelogramo. Um círculo contido em *ABCD* tangencia as retas *AB* e *AD* e intersecta *BD* em *E* e *F*. Mostre que existe um círculo passando por *E, F* e tangente a *BC* e *CD*.

12. (Rioplatense 2002) Dado um quadrilátero *ABCD*, constroem-se triângulos isósceles *ABK*, *BCL*, *CDM* e *DAN*, com bases sobre os lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, tais que *K*, *L*, *M* e *N* sejam pontos distintos, três a três não colineares. A perpendicular à reta *KL* traçada por *B* intersecta a perpendicular à reta *LM* traçada por *C* no ponto *P*; a perpendicular à reta *MN* traçada por *D* intersecta a perpendicular à reta *NK* traçada por *A* no ponto *Q*. Demonstre que, se *P* e *Q* são distintos, então *PQ* é perpendicular a *KM*.

(Dica: o problema 5 é uma boa inspiração...)

APÊNDICE

1. **(Relação de Euler)** Dado um triângulo *ABC*, $\Gamma_1(O;R)$ e $\Gamma_2(I;r)$ o circuncírculo e o incírculo, respectivamente, de *ABC*, então

$$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}\ .$$

Decorre da relação acima que $R \geq 2r$.

BIBLIOGRAFIA

1. H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.
2. M. S. Klamkin, *International Mathematical Olympiads 1978-1985*, The Mathematical Association of America, 1986.