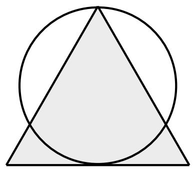
Até que tamanho podemos brincar de esconde-esconde?

Carlos Shine

Sejam K e L dois subconjuntos convexos e compactos de $\mathbb{R}^n$. Suponha que K sempre consiga se "esconder" atrás de L. Em termos mais precisos, para todo vetor unitário $u \in \mathbb{R}^n$, a projeção $(n-1)$-dimensional L_u de L na direção u, ou seja, no espaço $u^\perp$, contém a projeção análoga K_u. O que podemos afirmar sobre os volumes n-dimensionais de K e L?

Talvez seja uma surpresa que $\mathrm{vol}_n(K)$ possa ser maior do que $\mathrm{vol}_n(L)$, como mostra o exemplo a seguir: o círculo tem projeção de comprimento igual à altura do triângulo equilátero, e a razão entre suas áreas é $\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}36$.



Na verdade, para duas dimensões, pode-se provar que $\mathrm{area}(K) \le \frac{3}{2}\,\mathrm{area}(L)$. Você consegue encontrar um caso de igualdade? E demonstrar a desigualdade?

Veremos aqui que o sólido K não pode ser *muito* maior do que L, porém, em um resultado provado em... 2011!

1 Preliminares sobre sólidos convexos e compactos

Primeiro, lembremos que se v é um vetor constante não-nulo e x um vetor variável, então a equação

$$v \cdot x = c,$$

sendo c uma constante real, representa um hiperplano de $n-1$ dimensões.

Dado um compacto convexo K, definimos a sua *função suporte* $h_K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$h_K(v) = \max_{x \in K} x \cdot v$$

que é o "último" hiperplano normal a v que intercepta K. Pensando dessa forma, é fácil ver que se K e L são dois compactos convexos então $h_K = h_L \iff K = L$ (imagine que os hiperplanos "tateam" os sólidos, e aí determinamos suas bordas). Note que $x \cdot v \le h_K(v)$ para $x \in K$. Definimos os pontos de K que satisfazem a igualdade como K^u.

Agora, vamos fazer operações com os compactos. Primeiro, se fizermos uma translação $K + x$ em K, obtemos

$$h_{K+x}(v) = h_K(v) + x \cdot v$$

Se fizemos uma homotetia αK de K ($\alpha \in \mathbb{R}$), temos também

$$h_{\alpha K}(v) = \alpha h_K(v)$$

Podemos estender isso para a *soma de Minkowski* de dois compactos convexos K e L: sendo $K + L = \{k + \ell : k \in K \text{ e } \ell \in L\}$,

$$h_{K+L}(v) = h_K(v) + h_L(v),$$

o que dá uma cara de função linear.

Vamos provar alguns teoremas agora.

1.1 Teoremas de Helly e Lutwak

Começamos com o clássico teorema de Helly:

Teorema 1 (Teorema de Helly)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma família de compactos convexos em $\mathbb{R}^n$. Se quaisquer $n+1$ conjuntos de $\mathcal{F}$ têm um ponto em comum, então todos os elementos de $\mathcal{F}$ têm um ponto em comum.*

Demonstração: Começamos com um resultado bem simples de Radon. Considere $n+2$ pontos $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2} \in \mathbb{R}^n$. Então existem reais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{n+2} p_i x_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n+2} x_i = 0$$

(note que na primeira equação temos o vetor nulo e na segunda, o escalar zero.)

Eles existem pois o sistema acima tem $n+1$ equações e $n+2$ variáveis. Seja I o conjunto dos x_i's positivos e J o conjunto dos x_j's negativos ou nulos. Considere o ponto $P = \sum_{x_i \in I} \frac{x_i}{S} P_i = -\sum_{x_j \in J} \frac{x_j}{S} P_j$, sendo $S = \sum_{x_i \in I} x_i = -\sum_{x_j \in J} x_j$. Note que P é uma combinação linear positiva dos P_i's com índices de I e também é combinação linear positiva dos P_j's com índices em J. Então, todo conjunto de $n+2$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser particionado em dois conjuntos cujos fechos convexos têm interseção não vazia.

Vamos usar esse resultado para provar o teorema de Helly para conjuntos finitos (para conjuntos infinitos, use compacidade). Seja $m = |\mathcal{F}|$. Provaremos o resultado por indução sobre m. Para $m = n+2$, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_{n+2}$ e seja P_i a interseção de todos os conjuntos tirando X_i. Agora, aplique o resultado para os pontos P_i, $1 \le i \le n+2$, ou seja, particione o conjunto dos P_i's em dois conjuntos A_1 e A_2 tais que os fechos convexos de A_1 e A_2 tenham um ponto P em comum. Afirmamos que P está em todos os $n+2$ sólidos. Considere um sólido X_j qualquer. O único ponto P_i que pode não estar em X_j é P_j. Se (sem perda de generalidade) $P_j \in A_1$, então $A_2 \subset X_j$, e sendo X_j convexo, ele contém o fecho convexo de A_2 e portanto contém P. Logo P está em todo X_j, e a base acabou.

Agora suponha que $m > n+2$ e que o resultado é verdadeiro para $m-1$ sólidos. Então a base mostra que quaisquer $d+2$ sólidos têm um ponto em comum. Troque dois deles pela interseção, e obtenha $m-1$ sólidos dos quais quaisquer $d+1$ têm um ponto em comum, e o resultado segue pela hipótese de indução aplicada aos $m-1$ sólidos. $\square$

Vamos usar o teorema de Helly para provar um teorema que vai ser decisivo, pois nos indica um critério para saber quando um sólido está contido em outro. Primeiro, definimos um n-simplexo como o fecho convexo de um conjunto de $n+1$ pontos de $\mathbb{R}^n$ em posição geral (ou seja, um n-simplexo é uma generalização de triângulos e tetraedros).

Teorema 2 (Teorema da inclusão de Lutwak)**.** *Sejam K e L compactos convexos. Suponha que, para todo n-simplexo $\triangle$ que contém L, existe um vetor de translação $v_\triangle$ tal que $K + v_\triangle \subset \triangle$. Então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $K + v \subset L$.*

Demonstração: A ideia é razoavelmente natural: primeiro provamos o teorema para L sendo um politopo (sólidos definidos como a interseção de semiespaços) e depois construímos uma sequência de politopos tendendo a L.

Enfim, começamos com um politopo L com faces $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Seja u_i o vetor normal a F_i, apontando para fora de L. Suponha, sem perda de generalidade, que os vetores u_i são linearmente independentes (caso contrário, perturbe os vetores um pouquinho). Para cada face F_i, seja H_i o hiperplano determinado por F_i e H_i^+ o semiespaço fechado por H_i que contém L. Seja T_i o conjunto dos vetores v tais que $K + v \subset H_i^+$. Como H_i^+ é fechado e K é compacto, o conjunto T_i é fechado e não-vazio.

Como os u_i são linearmente independentes, qualquer escolha de $n+1$ vetores faz com que a interseção dos H_i's correspondentes contenha um simplexo $\triangle$ que contém L ou é ilimitada e contém qualquer coisa. No primeiro caso, a hipótese do teorema implica que existe $v_\triangle$ tal que $K + v_\triangle \subset \triangle$; no segundo caso, é claro que existe um vetor v tal que $K + v$ está na interseção. De qualquer forma, existe v na interseção dos $n+1$ conjuntos T_i correspondentes. Agora podemos usar o teorema de Helly e notar que existe um v que está na interseção de todos os T_is. Logo $K + v \subset H_i^+$ para $1 \le i \le m$. Mas sendo $L = \bigcap_{i=1}^m H_i^+$, $K + v \subset L$.

Para acabar, considere L qualquer e seja $\{P_i\}_{i\geq 0}$ uma sequência decrescente ($P_{i+1} \subset P_i$) de politopos cujo limite é L, com faces linearmente independentes. Se $\triangle$ é um simplexo contendo P_i, então $L \subset P_i \subset \triangle$, então existe w tal que $K + w \subset \triangle$. Como o teorema vale para P_i, existe um vetor v_i tal que $K + v_i \subset P_i$. Como P_i é descrescente, $\{v_i\}_{i\geq 0}$ é limitada e contém uma subsequência convergente. Seja v o limite. Então como $P_i \to L$, $K + v \subset L$. □

2 Escondendo atrás de simplexos

Com o último teorema em mãos, parece razoável adotar a seguinte linha de ataque: primeiro trabalhamos com L sendo um simplexo e depois tentamos usar o teorema para resolver o caso geral.

Na verdade, começamos com um simplexo particular. Defina Ξ como o simplexo cujos vértices são 0 e e_i, $1 \leq i \leq n$, sendo e_i o vetor unitário no i-ésimo eixo (Ξ é o "cantinho" do $\mathbb{R}^n$). Os vetores normais unitários exteriores das faces são $-e_1, -e_2, \ldots, -e_n, v$, sendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Agora defina D como o fecho convexo de Ξ e $P = \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}\right)$. Alternativamente, sendo $w_i = (1, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1, 1)$ o vetor cujas entradas são todas 1, exceto a i-ésima, que é zero, podemos definir D como a interseção dos semiespaços

$$D = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{x \mid e_i \cdot x \geq 0\}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{x \mid w_i \cdot x \leq 1\}\right)$$

Qual a relação entre D e Ξ? Lembre que Ξ_{e_i} é a projeção na direção e_i, ou seja, é a face normal a e_i. Considere o prisma $C_i = \Xi_{e_i} + E_i$, sendo E_i o segmento que liga 0 a e_i. Note que C_i contém Ξ. C_i também pode ser expresso como interseção de semiespaços:

$$C_i = \left(\bigcap_{j=1}^{n} \{x \mid e_j \cdot x \geq 0\}\right) \cap \{x \mid e_i \cdot x \leq 1\} \cap \{x \mid w_i \cdot x \leq 1\}$$

Das definições de C_i e D, temos que

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

Agora vamos ao resultado:

Teorema 3. *Seja K um compacto convexo tal que toda projeção Ξ_u contém uma translação da projeção correspondente K_u. Então existe um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$K + x \subset D \subset \frac{n}{n-1}\Xi.$$

Demonstração: Não há muito o que fazer a não ser "encostar" K no canto, ou seja, translade K de modo que todo hiperplano coordenado $e_i^\perp$ toque K. Sendo mais preciso, faça com que $h_K(-e_i) = 0$. Vamos nos referir a essa translação como K indistintamente.

Seja $y \in K$, com coordenadas $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Claramente temos $y_i \geq 0$.

Sabemos que cada projeção Ξ_u contém uma translação de K_u. Em particular, existe um vetor $x = (0, x_2, \ldots, x_n) \in e_1^\perp$ tal que $K_{e_1} + x \subset \Xi_{e_1}$. Para $i > 1$, temos

$$h_{K_{e_1}}(-e_i) + x \cdot (-e_i) = h_{K_{e_1}+x}(-e_i) \leq h_\Xi(-e_i) = 0$$

Logo

$$0 \geq h_{K_{e_1}}(-e_i) + x \cdot (-e_i) = h_K(-e_i) + x \cdot (-e_i) = 0 - x_i \implies x_i \geq 0$$

Agora, temos $x \cdot y \geq 0$, pois todas as entradas de x e y são não negativas. Portanto, sendo $y|e_1^\perp$ a projeção de y sobre o hiperplano coordenado $e_1^\perp$,

$$h_{K_{e_1}}(y|e_1^\perp) = h_{K_{e_1}}(y) \leq h_{K_{e_1}}(y) + x \cdot y = h_{K_{e_1}+x}(y) \leq h_{\Xi_{e_1}}(y) = \Xi_{e_1}(y|e_1^\perp)$$

Além disso, $h_{K_{e_1}}(-e_i) = 0 = h_{\Xi_{e_1}}(-e_i)$ para $i > 1$. Logo K_{e_1} está em todos os semiespaços de $e_1^\perp$ que definem o simplexo $(n-1)$-dimensional Ξ_{e_1}. Ou seja, $K_{e_1} \subset \Xi_{e_1}$.

É claro que esse argumento vale para todas as dimensões, logo

$$K_{e_i} \subset \Xi_{e_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por causa disso, a largura de K em qualquer dimensão é menor ou igual a 1 e, sendo $K_{e_i} \subset \Xi_{e_i}$, $K \subset C_i$ também. Deste modo,

$$K \subset \bigcap_{i=1}^{n} C_i = D.$$

Para terminar, basta notar que P pertence ao hiperplano $\sum_{i=1} x_i = \frac{n}{n-1}$, de modo que $P \in \frac{n}{n-1}\Xi$. É claro que os outros vértices de D também pertencem a $\frac{n}{n-1}\Xi$, logo $D \subset \frac{n}{n-1}\Xi$. $\square$

Esse caso particular, na verdade, é praticamente o que nos dá mais trabalho. Vamos generalizar para simplexos quaisquer:

Teorema 4. *Sejam K e L compactos convexos e $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Então L_u contém uma translação de K_u para todo vetor unitário u se, e somente se, $(\psi L)_u$ contém uma translação de $(\psi K)_u$ para todo u.*

Demonstração: Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ e um vetor não nulo v, seja $\mathcal{L}_S(u)$ o conjunto de retas em $\mathbb{R}^n$ paralelas a u que cortam S. A projeção L_u contém uma translação de K_u para cada vetor unitário u se, e somente se, para cada u existe v_u tal que

$$\mathcal{L}_{K+v_u}(u) \subset \mathcal{L}_L(u).$$

Mas $\mathcal{L}_{K+v_u}(u) = \mathcal{L}_K(u) + v_u$ e $\psi\mathcal{L}_K(u) = \mathcal{L}_{\psi K}(\psi u)$. Assim, a última condição ocorre se, e somente se, $\mathcal{L}_K(u) + v_u \subset \mathcal{L}_L(u)$, o que ocorre, por sua vez, se e somente se,

$$\mathcal{L}_{\psi K}(\psi u) + \psi v_u \subset \mathcal{L}_{\psi L}(\psi u) \quad \text{para todo } u \text{ unitário.}$$

Aí é só normalizar ψu para $\tilde{u}$, e sendo $\tilde{v} = \psi v_u$, temos

$$\mathcal{L}_{\psi K}(\tilde{u}) + \tilde{v} \subset \mathcal{L}_{\psi L}(\tilde{u}) \quad \text{para todo } \tilde{u} \text{ unitário,}$$

que é o mesmo que dizer que $(\psi L)_{\tilde{u}}$ contém uma translação de $(\psi K)_{\tilde{u}}$ para todo $\tilde{u}$ unitário. $\square$

Com isso, não é difícil estender o simplexo particular para um geral.

3 O teorema principal

Agora sim, podemos provar o teorema principal.

Teorema 5. *Sejam K e L compactos convexos tais que toda projeção L_u contém uma translação da projeção correspondente K_u. Então existe um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$K + x \subset \frac{n}{n-1} L.$$

Demonstração: Seja T um simplexo que contém L. Temos que T_u contém uma translação de K_u. Sejam Ξ e D os sólidos definidos na seção anterior e ψ uma transformação afim invertível tal que $\psi T = \Xi$. Pelo teorema 4, toda projeção $(\psi T)_u = \Xi_u$ contém uma translação de $(\psi K)_u$ de ψK. Então, pelo teorema 3, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\psi K + x \subset D \subset \frac{n}{n-1}\Xi$$

Como ψ é afim e invertível, o simplexo $\tilde{T} = \frac{n}{n-1}T$ contém uma translação de K. Além disso, $\tilde{T}$ circunscreve $\frac{n}{n-1}L$ se, e somente se, T circunscreve L. Então todo simplexo circunscrito $\tilde{T}$ contém uma translação de K. Pelo teorema da inclusão de Lutwak, $\frac{n}{n-1}L$ contém uma translação de K. $\square$

E com isso, provamos que

Corolário 1. *Sejam K e L compactos convexos tais que toda projeção L_u contém uma translação da projeção correspondente K_u. Então*

$$\mathrm{vol}(K) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \mathrm{vol}(L).$$

Demonstração: Seja x tal que, de acordo com o teorema anterior, $K + x \subset \frac{n}{n-1}L$. Então

$$\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K + x) \leq \mathrm{vol}\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)L\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \mathrm{vol}(L).$$

$\square$

4 Uma constante universal

Como $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \to e$ quando n vai para o infinito, é possível achar uma constante universal c para a qual compactos convexos K e L nas condições do teorema anterior satisfazem

$$\mathrm{vol}(K) \leq c \cdot \mathrm{vol}(L)$$

Estudos anteriores de Ball mostram que

$$\mathrm{vol}(K) \leq 1{,}1696\sqrt{n} \cdot \mathrm{vol}(L).$$

Para $n > 6$, o teorema nos dá valores melhores. Para $n = 6$ a constante é $1{,}1696\sqrt{6} \approx 2{,}865$ e para $n = 7$ é $\left(\frac{7}{6}\right)^7 \approx 2{,}942$. Então provamos que

Corolário 2. *Sejam K e L compactos convexos tais que toda projeção L_u contém uma translação da projeção correspondente K_u. Então*

$$\mathrm{vol}(K) \leq 2{,}942\,\mathrm{vol}(L).$$

5 Mais alguns resultados e problemas em aberto

As ideias acima podem ser generalizadas para projeções em dimensões menores. De fato, se pensarmos em projeções em espaços de dimensão $n - d$, basta trocar $\frac{n}{n-1}$ por $\frac{n}{n-d}$, e aí a razão entre volumes vai para e^d.

Mas várias perguntas continuam sem resposta. A constante 2,942 parece ser ainda muito grande, e de fato, conjectura-se que podemos trocar $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ por $\frac{n}{n-1}$. Para $n = 2$ dimensões já se sabe que a melhor constante é $\frac{3}{2}$, mas nada se sabe para dimensões maiores.

Se você se interessou, taí algo para se trabalhar!

6 Bibliografia

1. C. Chen, T. Khovanova, D. Klain. *Volume bounds for shadow covering.* Disponível em `http://arxiv.org/abs/1109.1619`

2. D. Klain, G.-C. Rota. *Introduction to Geometric Probability.*