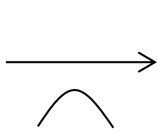
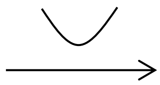
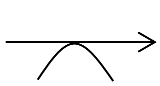
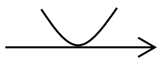
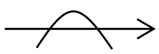
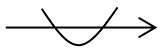
Álgebra para intermediários – Máximos, mínimos e outras ideias úteis

0) O que veremos na aula de hoje?

- Máximos e mínimos em funções do 2º grau
- Máximos e mínimos por trigonometria
- Máximos e mínimos por MA ≥ MG
- Máximos e mínimos por outras ideias

1) Máximos e mínimos em funções do 2º grau

Em algumas questões de olimpíadas, pode acontecer de não precisarmos exatamente encontrar o valor de uma função do 2º grau, mas precisarmos apenas saber que o valor dela é sempre maior ou menor que um valor específico. Nesses casos, uma boa saída é tentar provar que o Δ é sempre menor que zero.
Considerando uma função do 2º grau como sendo do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e a não nulo, podemos construir a tabela de gráficos abaixo. Nela, podemos perceber que o fato de Δ < 0 é suficiente, em muitos casos, para provar que uma determinada equação do 2º grau é sempre maior ou menor que zero, dependendo apenas do valor do a.

	a < 0	a > 0
Δ < 0 (2 raízes não reais)		
Δ = 0 (2 raízes reais e iguais)		
Δ < 0 (2raízes reais e distintas)		

Exemplo 1:

a) Mostre que $\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \leq \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2$

b) Determine todas as soluções inteiras de: $y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Solução:

a) Parte 1: $\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \;\leftrightarrow\; x^4 + 2.x^2.\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$$\leftrightarrow\; x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \leftrightarrow 0 < 1 + x + \frac{3.x^2}{4} \leftrightarrow 0 < \frac{4.(1 + x) + 3.x^2}{4}$$

$$\leftrightarrow \boxed{0 < 4 + 4.x + 3.x^2}\ (I)$$

Daí, temos que Δ= $b^2 - 4.a.c = 4^2 - 4.3.4 = 16 - 48 < 0$

Como a > 0 e Δ < 0, pelo gráfico (situação mostrada na direita da 1ª linha na tabela acima), temos que (I) é verdade para todo x real.

Parte 2: $1+x+x^2+x^3+x^4 \leq \left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$

$$\leftrightarrow\ 1+x+x^2+x^3+x^4\ \leq x^4+\frac{x^2}{4}+1+2.x^2.\frac{x}{2}+2.x^2.1+2.\frac{x}{2}.1$$

$$\leftrightarrow\ 1+x+x^2+x^3+x^4\ \leq x^4+x^3+\frac{9}{4}.x^2+x+1 \leftrightarrow x^2 \leq \frac{9}{4}.x^2\ \leftrightarrow \boxed{0 \leq \frac{5}{4}.x^2}$$

O que é verdade! A igualdade ocorre se e somente se x = 0.

b) Pelo item a, temos que: $\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2 < y^2 \leq \left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$. Ou seja, |y| está bem limitado entre dois números consecutivos, se x par, ou entre dois números fracionários consecutivos, se x ímpar. Portanto, temos 2 casos a analisar:

Caso 1: se x par

Nesse caso, $|y| = x^2+\frac{x}{2}+1$ e ocorre a igualdade da parte 2 do item a. Daí, temos que: x = 0 → |y| = 1 → y = ±1 .

Caso 2: se x ímpar

Nesse caso, $|y| = x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. Daí, substituindo na equação do enunciado, temos que:

$$y^2 = 1+x+x^2+x^3+x^4 \leftrightarrow\ \left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 = 1+x+x^2+x^3+x^4$$

$$\leftrightarrow x^4+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}+2.x^2.\frac{x}{2}+2.x^2.\frac{1}{2}+2.\frac{x}{2}.\frac{1}{2} = 1+x+x^2+x^3+x^4 \leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{3}{4} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{2x}{4}-\frac{3}{4} = 0 \leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \rightarrow \boxed{x=-1}\ ou\ \boxed{x=3}$$

Daí, temos que x = -1 → |y| = 1 → y = ±1 e x = 3 → |y| = 11 → y = ±11. Portanto, as soluções são: (x,y) = (0, ±1) ; (1, ±1) e (3, ±11).

Outra ideia utilizada na solução acima consiste em: "limitar por cima e por baixo" os valores de alguma variável específica (no caso da questão, a variável y) e a partir disso, definir exatamente o valor dela ou, ao menos, reduzir os possíveis valores a poucos casos. Note que essa ideia é recomendável apenas quando estamos procurando soluções inteiras. Para entender melhor, considere o exemplo abaixo:

Exemplo 2: (OCM-1998 – 8º e 9º ano – Q1) Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que: $\frac{b^2+b}{a^2+a} = 4$.

Solução:

$$\frac{b^2+b}{a^2+a} = 4 \leftrightarrow b^2+b = 4a^2+4a$$

Note que o lado direito é quase um quadrado perfeito, pois tem:

- Um quadrado perfeito: $4a^2 = (2a)^2$
- Algo tipo 2 vezes o primeiro pelo segundo: 2.(2a).1

Então, o que falta? Elementar, Watson! Falta o quadrado do segundo: 1^2.
Daí, somando 1^2 dos dois lados, temos que:

$$b^2 + b + 1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$$

Como b > 0, temos que:

$$b^2 < \underbrace{b^2 + b + 1}_{=(2a+1)^2} < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$$

Portanto, $(2a+1)^2$ está entre dois quadrados consecutivos, o que gera um absurdo!

Obs.: Note que essa ideia pode ser muito útil para resolver a questão ou, pelo menos, deixar bem próximo de terminá-la. Por exemplo, vamos supor que tivéssemos provado que:

$$b^2 + 8b + 3 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$$

Daí, poderíamos tentar dois modos de resolver:

Modo 1: Usar os seguintes limitantes superiores e inferiores (afinal, b > 0):

$$b^2 < \underbrace{b^2 + 8b + 3}_{=(2a+1)^2} < b^2 + 8b + 16 = (b+4)^2$$

Daí, teríamos que (2a + 1) = (b + 1) , (b + 2) ou (b + 3) e, então, bastava fazer os três casos.

Modo 2: Lembrar que $b^2 + 6b + 9 > b^2 + 8b + 3 \leftrightarrow b < 2$ e, então, fazer na marra os casos b = 1 e b = 2 (nesse caso, ocorre a igualdade entre $b^2 + 6b + 9$ e $b^2 + 8b + 3$) e aplicar, para $b \geq 3$, que:

$$(b+3)^2 = b^2 + 6b + 9 < \underbrace{b^2 + 8b + 3}_{=(2a+1)^2} < b^2 + 8b + 16 = (b+4)^2$$

Embora nesse exemplo o modo 2 seja melhor, pode haver casos em que o modo 1 é melhor.

Vamos, agora, provar matematicamente o que está mostrado na tabela. Para isso, considere a função do 2º grau $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, com a, b e c reais e a não nulo.
Considere, sem perda de generalidade, que a > 0. Daí, temos que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{4a.(ax^2 + bx + c)}{4a} = \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x) = \frac{(2ax+b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{4.a^2.\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \Delta}{4a} = \boxed{a.\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

Portanto, temos que: se a > 0 e $\Delta < 0$, então teremos f(x) > 0, para todo x real, conforme mostrado na direita da 1ª linha da tabela acima.
Para encontrarmos as demais situações da tabela, o raciocínio é totalmente análogo.

Obs.: x = - b/2a é o valor de x que causa o valor mínimo de f(x) na parábola para o caso de a > 0. Ele é chamado de chamado de $x_{vértice}$. Isto acontece porque o vértice da parábola é definido

como sendo o ponto onde ela troca de sentido.
Nesse caso, teremos que y = - Δ/4a é o valor mínimo para f(x), também para a > 0. Ele é chamado de $y_{vértice}$ pelo mesmo motivo de $x_{vértice}$. De uma forma resumida, temos que:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \geq {}^{-\Delta}/_{4a}\,; se\ a > 0 \\ \leq\ -{}^{\Delta}/_{4a}\,; se\ a < 0 \end{cases}}$$

Obs.: Pode acontecer uma função de grau maior onde uma substituição adequada é suficiente para tornar a tal função uma do 2º grau. Por exemplo, a substituição $x^2 = k$, transforma a função $a.x^4 + b.x^2 + c$ em $a.k^2 + b.k + c$.

2) Máximos e mínimos por trigonometria

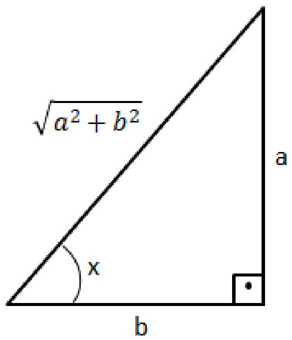
Em outros casos, os máximos e mínimos podem ser obtidos pelo uso da trigonometria, geralmente por alguma boa substituição trigonométrica. Nesses casos, é comum usarmos, por exemplo:

- $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha\ \ ou\ \ \cos \alpha\ \ \leq 1\,, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\,, \exists \beta\ \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ tal\ que\ tg\ \beta = x$
- alguma trigonometria associada com princípio das casas dos pombos como, por exemplo, $se\ \ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,, então\ \exists i, j\ tal\ que\ x_i - x_j \leq \frac{\pi}{4}$

Vejamos dois exemplos onde essas ideias são aplicadas.

Exemplo 3: Encontre os valores mínimo e máximo de $T = a.\cos\theta + b.sen\theta, com\ 0 \leq \theta < 2\pi$, sendo a e b reais positivos.

Solução: Considere um triângulo retângulo de catetos a e b. Daí, sendo x o ângulo agudo oposto ao cateto a, conforme mostrado na figura ao lado. Daí , temos que:



$$sen\ x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow a = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right).sen\ x$$

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow b = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right).cosx$$

Aplicando em T, temos que:

$$T = a.\cos\theta + b.sen\theta = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right).sen\ x\ .cos\theta + \left(\sqrt{a^2+b^2}\right).cosx\ .sen\theta$$

$$T = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right).(sen\ x\ .cos\theta + cosx\ .sen\theta) \rightarrow \boxed{T = \ \left(\sqrt{a^2+b^2}\right).sen(x+\theta)}(I)$$

Daí, temos que: $-1 \leq \operatorname{sen}(x+\theta)\ \leq 1 \overset{(I)}{\rightarrow} \boxed{-\left(\sqrt{a^2+b^2}\right) \leq T \leq \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)}$

Onde o mínimo e o máximo acontecem quando $x + \theta = \frac{3\pi}{2} e \frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Exemplo 4: Prove que, dentre quaisquer cinco reais y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, existem dois, que satisfazem: $0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i . y_j} \leq 1$.

Solução:

Com estamos falando em números reais, então temos que:

$$\exists x_i \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\; tal\ que\ tg\ x_i = y_i \; ; \; \forall i = 1, 2, 3, 4\ ou\ 5\ (I)$$

Substituindo na equação do enunciado, temos que:

$$tg0 = 0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i . y_j} = \frac{tg\ x_i - tg\ x_j}{1 + tg\ x_i . tg\ x_j} = tg(x_i - x_j) \leq 1 = tg\frac{\pi}{4}$$
$$\leftrightarrow 0 \leq (x_i - x_j) \leq \frac{\pi}{4}$$

O que é verdade para algum i e j pela aplicação direta do princípio da casa dos pombos, afinal estamos escolhendo 5 pontos (x_i's) em um intervalo de tamanho π.

3) Máximos e mínimos por MA ≥ MG

Há, também, situações, onde uma aplicação da famosa desigualdade entre médias aritmética e geométrica é suficiente para resolver o problema. Vale lembrar que:

- a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica só é válida para números reais positivos
- a igualdade em MA ≥ MG só e somente só acontece quando há igualdade entre os termos.

Às vezes, os termos que serão levados em conta para fazer a desigualdade das médias não estão muito claros, o que pode nos obrigar a fazer algum algebrismo conveniente.

Exemplo 5: Sejam x, y e z inteiros positivos tais que x + y +z = 60. Determine o valor máximo de $x.y^2.z^3$.

Solução: Por MA ≥ MG, temos que:

$$\frac{x + \overbrace{\frac{y}{2} + \frac{y}{2}}^{y} + \overbrace{\frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3}}^{z}}{6} \geq \sqrt[6]{x.\left(\frac{y}{2}\right).\left(\frac{y}{2}\right).\left(\frac{z}{3}\right).\left(\frac{z}{3}\right).\left(\frac{z}{3}\right)}$$
$$\frac{60}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{x.y^2.z^3}{2^2.3^3}} \leftrightarrow \boxed{x.y^2.z^3 \leq 108.10^6}$$

Onde a igualdade acontece quando os termos são iguais. Ou seja, quando:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{x + y + z}{1 + 2 + 3} = \frac{60}{6} = 10 \rightarrow \boxed{(x, y, z) = (10,20,30)}$$

Exemplo 6: (OCM-2011 – 8º e 9º ano – Q1) Qual o valor mínimo da expressão: $\frac{126 + 14.x^4}{2011.x^2}$ no conjunto dos números reais diferentes de zero?

Solução:

Lembremos que x^4 e $x^2 > 0$, pois $x \neq 0$. Desse modo, podemos aplicar MA ≥ MG. Porém, precisamos, antes, ajeitar a equação com um simples algebrismo:

$$\frac{126 + 14.x^4}{2011.x^2} = \frac{126}{2011.x^2} + \frac{14.x^4}{2011.x^2} = \frac{126}{2011.x^2} + \frac{14.x^2}{2011}$$

Agora sim, podemos aplicar MA ≥ MG:

$$\frac{\frac{126}{2011.x^2} + \frac{14.x^2}{2011}}{2} \geq \sqrt[2]{\frac{126}{2011.x^2}.\frac{14.x^2}{2011}}$$

$$\frac{126}{2011.x^2} + \frac{14.x^2}{2011} \geq 2.\sqrt[2]{\frac{126}{2011}.\frac{14}{2011}} = 2.\sqrt[2]{\frac{9.14.14}{2011^2}} = 2.\frac{3.14}{2011} = \boxed{\frac{84}{2011}}$$

Note que a igualdade acontece quando:

$$\frac{126}{2011.x^2} = \frac{14.x^2}{2011} \leftrightarrow 126 = 14.x^4 \leftrightarrow x^4 = 9 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Obs.: Em algumas situações, é necessário mostrar, pelo menos, que o mínimo acontece.

4) Máximos e mínimos por outras ideias

Algumas vezes, precisamos saber utilizar técnicas diferentes envolvendo desigualdades para, pelo menos, clarear melhor as ideias e, então, conseguir melhorar a questão e, desse modo, resolvê-la.
Uma das técnicas conhecidas seria usar alguma racionalização ou "desracionalização" conveniente.
Em outros casos, alguma soma telescópica está envolvida na solução da questão.

Exemplo 6: Mostre que: $2.\sqrt{101} - 2 < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} < 20.$

Solução: Note que: $\underbrace{\sqrt{i+1} - \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}}_{\text{"}desracionalização\text{"}} < \frac{1}{2.\sqrt{i}} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i-1}} = \sqrt{i} - \sqrt{i-1}}_{\text{"}desracionalização\text{"}}$

Daí, basta fazer uma soma telescópica para i =1, 2, 3,..., 100 e, então, a desigualdade pedida aparecerá naturalmente.

5) Outros exercícios

1) (Bulgária – 1997) Encontre todos os números naturais a, b, c tais que as raízes das equações:

$$x^2 - 2.a.x + b = 0$$
$$x^2 - 2.b.x + c = 0$$
$$x^2 - 2.c.x + a = 0$$

são números naturais.

2) (República Checa e Eslováquia – 1997) Para cada natural n ≥ 2, determine o valor máximo possível da expressão:

$$V_n = senx_1.cosx_2 + senx_2.cosx_3 + \cdots + senx_n.cosx_1$$

onde x_1 , x_2 ,..., x_n são números reais arbitrários.

3) (Turquia-1998) Seja (a_n) uma sequência de números reais definida por:

$$a_1 = t$$

$$a_{n+1} = 4.a_n.(1 - a_n) \text{ para } n \geq 1.$$

Para quantos valores distintos de t teremos $a_{1998} = 0$?

4) (Romênia-1998) O volume de um paralelepípedo é 216 cm³ e a sua área total é 108 cm². Mostre que o paralelepípedo é um cubo.

5) (Bulgária-1999) Seja p um parâmetro real tal que a equação $x^2 - 3px - p = 0$ possui duas raízes reais distintas x_1 e x_2.

a) Prove que $3px_1 + x_2^2 - p > 0$.

b) Determine o menor valor possível de $A = \dfrac{p^2}{3px_1 + x_2^2 + 3p} + \dfrac{3px_2 + x_1^2 + 3p}{p^2}$. Quando ocorre a igualdade ?

6) (Irlanda-2000) Sejam x ≥ 0, y ≥ 0 números reais tais que x + y = 2. Mostre que $x^2.y^2.(x^2+y^2) \leq 2$.

7) (Seletiva Fortaleza – Rioplatense - 2012) Seja *n* um inteiro positivo. Determine todos os reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfazem a relação:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2.\sqrt{x_2 - 2^2} + 3.\sqrt{x_3 - 3^2} + \cdots + n.\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

8) (Inglaterra - 2000) Sejam x, y e z números reais positivos tais que xyz = 32. Determine o valor mínimo de $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$?

9) (OCM – 2012) Sejam x e r inteiros positivos tais que $r^2 \leq x$. Qual é o menor quadrado perfeito maior que x.(x+r).(x+2r).(x+3r)?

10) (Rússia - 2009) Sejam a, b e c três números reais que satisfazem:

$$\begin{cases} (a+b)(b+c)(c+a) = abc \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3 \end{cases}$$

Prove que abc = 0.