CONTEÚDO

ARTIGOS

XIV OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Quantos números distintos de 6 algarismos e múltiplos de 45 podem ser escritos colocando um dígito à esquerda e outro à direita de 2008?

PROBLEMA 2

No colégio Olímpico as provas são avaliadas com números inteiros, a menor nota possível é 0, e a maior é 10. Na aula de Matemática o professor aplica as provas. Este ano a turma tem 15 alunos. Quando um dos alunos tira na primeira prova uma nota menor que 3 e na segunda prova uma nota maior que 7, o aluno é chamado de aluno superado. O professor, ao terminar de corrigir as provas, fez uma média com as 30 notas e obteve 8. Qual é a maior quantidade de alunos superados que pode ter tido a turma?

PROBLEMA 3

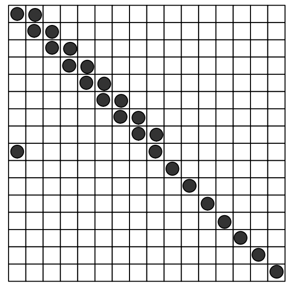
Num quadro negro estão escritos os números inteiros de 1 a 2008 inclusive. Apagam-se dois números e escreve-se a diferença entre eles. Por exemplo, se apagamos o número 5 e 241, escrevemos 236. Assim continuamos, apagando os números e escrevendo a diferença, até que fica somente um número. Determine se o número que ficou por último pode ser 2008. E 2007?
Em cada caso, se a resposta é afirmativa indique uma seqüência com esse número final, e se é negativa, explique o porquê.

PROBLEMA 4

Sobre o lado AB de um quadrado $ABCD$ é desenhado exteriormente o triângulo retângulo ABF, de hipotenusa AB. Sabe-se que $AF = 6$, e que $BF = 8$. Chamamos de E o centro do quadrado. Calcule o comprimento de EF.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro de 16×16 colocamos 25 moedas, como na figura abaixo. É permitido selecionar 8 linhas e 8 colunas e retirar do tabuleiro todas as moedas que se encontram nessas linhas e colunas. Determine se é possível retirar todas as moedas do tabuleiro.
Se a resposta é afirmativa, indique as 8 linhas e as 8 colunas selecionadas, e se é negativa, explique o porquê.



SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

Num quadro negro está escrita a seguinte expressão:

$$1-2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9-2^{10}.$$

Juan distribui parêntesis de distintas maneiras e efetua o cálculo que fica. Por exemplo:

$1-2-(2^2-2^3)-2^4-(2^5-2^6-2^7)-2^8-(2^9-2^{10})=403$ ou

$1-(2-2^2(-2^3-2^4)-(2^5-2^6-2^7))-(2^8-2^9)-2^{10}=-933.$

Quantos resultados diferentes pode obter Juan?

PROBLEMA 2

No retângulo *ABCD* de lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, seja *P* um ponto do lado *AD* tal que $B\hat{P}C=90°$. A perpendicular a *BP* traçada por *A* corta *BP* em *M* e a perpendicular a *CP* traçada por *D* corta *CP* em *N*.
Demonstre que o centro do retângulo está no segmento *MN*.

PROBLEMA 3

Nos números 1010...101 estão alternados *uns* e *zeros*; se há *n* uns, há *n* – 1 zeros $(n\geq 2)$.

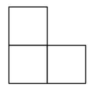
Determine os valores de *n* para os quais o número 1010...101, que tem *n* uns, é primo.

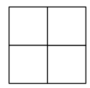
PROBLEMA 4

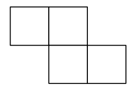
No plano há 16 retas tais que não há duas paralelas nem três concorrentes. Sebastián tem que pintar os 120 pontos que são interseção de duas retas de modo que em cada reta todos os pontos pintados sejam de cor diferente.
Determine o número mínimo de cores que Sebastián precisa para concluir a tarefa.
E se as retas são 15 (neste caso, os pontos são 105)?

PROBLEMA 5

Matias cobriu um tabuleiro quadrado de 7×7, dividido em casas de 1×1, com peças dos três tipos a seguir


Tipo 1


Tipo 2


Tipo 3

sem buracos nem superposições, e sem sair do tabuleiro.
Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casas e cada peça do tipo 2 ou do tipo 3 cobre exatamente 4 casas.
Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter utilizado.
(As peças podem girar e ser viradas).

RESULTADO BRASILEIRO

2008: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade - Estado	Pontos	Prêmio
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo – SP	45	Medalha de Ouro
Débora Ornellas	Salvador – BA	36	Medalha de Prata
Nicolas Seoane Miquelin	Mauá – SP	34	Medalha de Prata
Guilherme Renato Martins Unze	São Paulo – SP	33	Medalha de Bronze
Ana Beatrice Bonganha Zanon	Santo André – SP	26	Medalha de Bronze
Paula Dias Garcia	Brasília – DF	24	Medalha de Bronze
Lara Timbó Araújo	Fortaleza – CE	24	Medalha de Bronze
Francisco Markan Nobre de Souza Filho	Fortaleza – CE	24	Menção Honrosa
Henrique Gasparini Fiúza do Nascimento	Brasília – DF	23	Menção Honrosa
Henrique Vieira G. Vaz	São Paulo – SP	23	Menção Honrosa

2008: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade - Estado	Pontos	Prêmio
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza – CE	37	Medalha de Ouro
Guilherme da Rocha Dahrug	Santo André – SP	30	Medalha de Prata
Matheus Barros de Paula	Taubaé – SP	29	Medalha de Prata
Rafael Ferreira Antonioli	S.B. do Campo – SP	23	Medalha de Bronze
Nara Gabriela de Mesquita Peixoto	Fortaleza – CE	22	Medalha de Bronze
Rodrigo Nagamine	Santo André – SP	22	Medalha de Bronze
Henrique Lopes de Mello	Rio de Janeiro – RJ	21	Medalha de Bronze
Victorio Takahashi Chu	São Paulo – SP	21	Menção Honrosa
Jonas Rocha de Lima Amaro	Fortaleza – CE	17	Menção Honrosa
Deborah Barbosa Alves	São Paulo – SP	16	Menção Honrosa

XLVIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XLVIII Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Hanói, Vietnã no período de 19 a 31 de julho de 2007. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Carlos Gustavo Moreira do Rio de Janeiro – RJ e Onofre Campos da Silva Farias de Fortaleza – CE.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Régis Prado Barbosa**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Henrique Pondé de Oliveira Pinto**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Ramón Moreira Nunes**	**Medalha de Bronze**
BRA4	**Rafael Sampaio de Rezende**	**Medalha de Bronze**
BRA5	**Rafael Tupynambá Dutra**	**Medalha de Bronze**
BRA6	**Guilherme Phillipe Figueiredo**	**Menção Honrosa**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. Para cada $i (1 \le i \le n)$ definimos

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}$$

e

$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

(a) Prove que para quaisquer números reais $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Prove que existem números reais $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ para os quais vale a igualdade em (*).

PROBLEMA 2:

São dados cinco pontos *A*, *B*, *C D* e *E* tais que *ABCD* é um paralelogramo e *BCED* é um quadrilátero cíclico (e convexo). Seja ℓ uma recta que passa por *A*.

Suponhamos que ℓ intersecta o segmento DC num ponto interior F e a recta BC em G.
Suponhamos também que $EF = EG = EC.$ Prove que ℓ é a bissectriz do ângulo DAB.

PROBLEMA 3:
Numa competição de Matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um *clique* se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um *clique*). O *tamanho* de um clique é o número de seus elementos.
Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.
Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
No triângulo ABC a bissectriz do ângulo BCA intersecta a circunferência circunscrita em $R(R \neq C)$, a mediatriz de BC em P e a mediatriz de AC em Q.
O ponto médio de BC é K e o ponto médio de AC é L. Mostre que os triângulos RPK e RQL têm áreas iguais.

PROBLEMA 5:
Sejam a e b inteiros positivos tais que $4ab – 1$ divide $(4a^2 - 1)^2.$ Prove que $a = b$.

PROBLEMA 6:
Seja n um número inteiro positivo. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0,1,..., n\}, x + y + z > 0\}$$

de $(n+1)^3 - 1$ pontos no espaço tridimencional. Determine o menor número possível de planos cuja união contém todos os pontos de S mas não contém (0, 0, 0).

XLIX OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XLIX Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Madri, Espanha no período de 10 a 22 de julho de 2008. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Luciano Monteiro de Castro do Rio de Janeiro – RJ e Carlos Yuzo Shine de São Paulo – SP.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Davi Lopes Alves de Medeiros**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Henrique Pondé de Oliveira Pinto**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Marcelo Matheus Gauy**	**Medalha de Bronze**
BRA4	**Rafael Tupynambá Dutra**	**Medalha de Prata**
BRA5	**Régis Prado Barbosa**	**Medalha de Prata**
BRA6	**Renan Henrique Finder**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Seja ABC um triângulo acutângulo e seja H o seu ortocentro. A circunferência de centro no ponto médio de BC e que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2.

Analogamente, a circunferência de centro no ponto médio de CA e que passa por H intersecta a reta CA nos pontos B_1 e B_2, e a circunferência de centro no ponto médio de AB e que passa por H intersecta a reta AB nos pontos C_1 e C_2. Mostre que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ estão sobre uma mesma circunferência.

PROBLEMA 2:

(a) Prove que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1 \qquad (*)$$

para todos os números reais *x*, *y*, *z*, diferentes de 1, com *xyz* = 1.

(b) Prove que existe uma infinidade de ternos de números racionais *x*, *y*, *z*, diferentes de 1, com *xyz* = 1, para os quais ocorre a igualdade em (*).

PROBLEMA 3:

Prove que existe um número infinito de inteiros positivos n tais que n^2+1 tem um divisor primo maior que $2n+\sqrt{2n}$.

PROBLEMA 4:

Determine todas as funções $f\ ]0,\infty[\ \to\ ]0,\infty[$ (ou seja, f é uma função dos reais positivos para os reais positivos) tais que

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

para todos os números reais positivos w, x, y com $wx = yz$.

PROBLEMA 5:

Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k\geq n$ e $k-n$ é um número par.
São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*.
Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acessa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos seqüências de operações.
Seja n o número de seqüências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acessas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas.
Seja M o número de seqüências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ e $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.
Determine a razão $\dfrac{N}{M}$.

PROBLEMA 6:

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados BA e BC tam comprimentos diferentes. Sejam w_1 e w_2 as circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente.
Suponhamos que existe um circunferência w tangente à reta BA de forma que A está entre B e o ponto de tangência, tangente à reta BC de forma que C está entre B e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas AD e CD. Prove que as tangentes comuns exteriores a w_1 e w_2 se intersectam sobre w.

XXII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XXII Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Coimbra, Portugal no período de 6 a 16 de setembro de 2007. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Eduardo Wagner e Edmilson Motta da cidade do Rio de Janeiro – RJ e São Paulo – SP respectivamente.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Henrique Pondé de Oliveira Pinto**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Ramon Moreira Nunes**	**Medalha de Ouro**
BRA4	**Régis Prado Barbosa**	**Medalha de Ouro**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Dado um inteiro positivo *m*, define-se a sucessão $\{a_n\}$ da seguinte maneira:

$$a_1 = \frac{m}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil, \text{ si } n \geq 1.$$

Determinar todos os valores de *m* para os quais a_{2007} é o primeiro inteiro que aparece na sucessão.

Nota: Para um número real *x* se define $\lceil x \rceil$ como o menor inteiro que é maior ou igual a *x*.

Por exemplo, $\lceil p \rceil = 4, \lceil 2007 \rceil = 2007$.

PROBLEMA 2:

Sejam *ABC* um triângulo com incentro *I* e Γ uma circunferência de centro *I*, de raio maior que o da circunferência inscrita e que não passa por nenhum dos vértices. Sejam X_1 o ponto de intersecção de Γ com a reta *AB* mais perto de B, X_2 e X_3 os pontos de intersecção de Γ com a recta *BC* sendo X_2 o mais perto de *B* e X_4 o ponto de intersecção de Γ com a recta *CA* mais perto de *C*. Seja *K* o ponto de intersecção das rectas X_1X_2 e X_3X_4. Demonstre que *AK* corta o segmento X_2X_3 no seu ponto médio.

PROBLEMA 3:

Duas equipes, A e B disputam o território limitado por uma circunferência.

A tem n bandeiras azuis e B tem n bandeiras brancas ($n \geq 2$, fixo). Jogam alternadamente e A começa o jogo. Cada equipe, na sua vez, coloca uma das suas bandeiras num ponto da circunferência que não se tenha usado numa jogada anterior. Cada bandeira, uma vez colocada, não se pode mudar de lugar.

Uma vez colocadas as $2n$ bandeiras reparte-se o território entre as duas equipes. Um ponto do território é da equipe A se a bandeira mais próxima dele é azul, e é da equipe B se a bandeira mais próxima dele é branca. Se a bandeira azul mais próxima de um ponto está à mesma distância que a bandeiras branca mais próxima deste ponto, então o ponto é neutro (não é de A nem de B). Uma equipe ganha o jogo se seus pontos cobrem uma área maior que a área coberta pelos pontos da outra equipe. Há empate se ambos cobrem áreas iguais.

Demonstre que, para todo n a equipe B tem estratégia para ganhar o jogo.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Em um tabuleiro quadriculado de tamanho 19×19, uma ficha chamada *dragão* dá saltos da seguinte maneira: desloca-se 4 casas numa direcção paralela a um dos lados do tabuleiro e 1 casa em direção perpendicular à anterior.

				X		X					
	X								X		
					D						

A partir de D, o dragão pode saltar para uma das quatro posições X.

Sabe-se que, com este tipo de saltos, o dragão pode mover-se de qualquer casa a qualquer outra.

A *distancia dragoniana* entre duas casas é o menor número de saltos que o dragão deve dar para mover-se de uma casa a outra.

Seja C uma casa situada num canto do tabuleiro e seja V a casa vizinha a C que a toca num único ponto.

Demonstre que existe alguma casa X do tabuleiro tal que a distância dragoniaana de C a X é maior que a distãncia dragoniana de C a V.

PROBLEMA 5:
Um número natural n é *atrevido* se o conjunto dos seus divisores, incluindo 1 e n, pode ser dividido em três subconjuntos tais que a soma dos elementos de cada subconjunto é a mesma nos três. Qual é a menor quantidade de divisores que pode ter um número *atrevido*?

PROBLEMA 6:
Seja F a família de todos os hexágonos convexos H que satisfazem as seguintes condições:

a) os lados opostos de H são paralelos;
b) quaisquer três vértices de H podem ser cobertos por uma faixa de largura 1.

Determine o menor número real ℓ tal que cada um dos hexágonos da família F pode ser coberto com uma faixa de largura ℓ.

Nota: Uma faixa de largura ℓ é a região do plano compreendida entre duas rectas paralelas que estão à distancia ℓ (incluídas ambas as rectas paralelas).

XXIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XXIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Salvador, Bahia no período de 20 a 28 de setembro de 2008. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Eduardo Wagner e Fábio Dias Moreira, ambos da cidade de Rio de Janeiro – RJ. Com este resultado a equipe brasileira obteve também a maior pontuação total da competição ficando em primeiro lugar com 155 pontos.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Henrique Ponde de Oliveira Pinto**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Renan Henrique Finder**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Ramon Moreira Nunes**	**Medalha de Ouro**
BRA4	**Régis Prado Barbosa**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Os números 1, 2, 3,..., 2008^2 são distribuídos num tabuleiro 2008×2008, de modo que em cada casa haja um número distinto. Para cada linha e cada coluna do tabuleiro calcula-se a diferença entre o maior e o menor dos seus elementos. Seja S a soma dos 4016 números obtidos.

Determine o maior valor possível para S.

PROBLEMA 2:

Sejam ABC um triângulo escaleno e r a bissectriz externa do ângulo $\angle ABC$. Sejam P e Q os pés das perpendiculares à recta r que passam por A e C, respectivamente. As rectas CP e AB intersectam-se em M e as rectas AQ e BC intersectam-se em N. Demonstre que as rectas AC, MN e r têm um ponto em comum.

PROBLEMA 3:

Sejam m e n inteiros tais que o polinômio $P(x) = x^3 + mx + n$ tem a seguinte propriedade: se x e y são inteiros e 107 divide $P(x) - P(y)$, então 107 divide $x - y$. Demosntre que 107 divide m.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
Demonstre que não existem inteiros positivos x e y tais que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

PROBLEMA 5:
Seja ABC um triângulo e X, Y, Z pontos interiores dos lados BC, AC, AB respectivamente. Sejam A', B', C' os circuncentros dos triângulos AZY, BXZ, CYX, respectivamente.
Demonstre que

$$\left(A'B'C'\right) \geq \frac{(ABC)}{4}$$

e que a igualdade ocorre se, o somente se, as rectas AA', BB', CC' têm um ponto em comum.

Observação: Para um triângulo qualquer RST, denotamos a sua área por (RST).

PROBLEMA 6:
Numa partida de *biribol* enfrentam-se duas equipes de quatro jogadores cada uma.
Organiza-se um torneio de biribol em que participam n pessoas, que formam equipes para cada partida (as equipes não são fixas). No final do torneio observou-se que cada duas pessoas disputaram exactamente uma partida em equipes rivais. Para que valores de n é possível organizar um torneio com tais características?

0,999... OU "COMO COLOCAR UM BLOCO QUADRADO EM UM BURACO REDONDO"

Pablo Emanuel

- Nível Intermediário

Quando um jovem estudante de matemática começa a estudar os números reais, é difícil não sentir certo desconforto e estranhamento. De repente, algumas coisas que faziam sentido param de funcionar tão bem assim. Com certeza, uma das mais estranhas pode ser resumida na igualdade

$$0{,}9999..... = 1{,}0000...$$

Como assim? No mundo dos números inteiros (com a exceção muito razoável de 0 = –0), qualquer número tem uma única representação decimal (os zeros à esquerda não são um problema sério, ou definimos que nunca podemos começar com 0 – o que deixa o próprio zero em uma situação meio desconfortável de ter uma representação decimal vazia – ou definimos que sempre vamos completar com infinitos zeros à esquerda), e esta se comporta bem – i.e. qualquer número da forma 8*xxxxxxx* é menor que qualquer número da forma 9*yyyyyyy* com o mesmo número de dígitos. Como pode haver um número começado por 0,9 que não seja menor que um número começado por 1,0 e, pior, que seja igual!? A resposta explica, mas não convence: se definirmos as seqüências:

$a_n =$ 0.999999...9 (n dígitos 9) e
$b_n =$ 1.000000...0 (n dígitos 0)

temos que $a_n < 0.999... \Leftarrow 1.000... < b_n$. No entanto, como $b_n - a_n = 1/10^n$, que converge para 0, a diferença entre 1.000... e 0.999..., que é menor que qualquer das diferenças $b_n - a_n$ só pode ser 0, logo os números são iguais.

OK, entendido, mas ainda tem caroço neste angu. Por que a representação decimal, que se comporta tão bem para números inteiros tem este tipo de esquisitice para números reais? A verdade é que usar a representação decimal para números reais é enfiar um bloco quadrado em um buraco redondo.

Em primeiro lugar, até agora estamos usando a representação decimal (base 10) apenas porque é a representação com que estamos mais acostumados. Será que o problema está com o número 10? Infelizmente não. Mesmo que usemos outras bases, o problema continua:

0,1111.... = 1,000.... em base 2
0,2222... = 1,000... em base 3

e o mesmo problema acontece em qualquer base que escolhamos (e a demonstração é exatamente a mesma, *mutatis mutandis*, que fizemos lá em cima).

Antes de entrarmos a fundo em por que a representação decimal (ou em qualquer base N) tem estes problemas, é bom ver que outras opções nós temos para representar os números reais. Em primeiro lugar, nossas notações foram feitas para trabalhar com números inteiros, que é o que nos é familiar (a ponto de Pitágoras afirmar que os números inteiros são a fundação do universo). Dos números inteiros conseguimos de forma natural derivar os números racionais (os números da forma a/b, onde a e b são inteiros). O pulo para os números reais irracionais, no entanto, é menos natural, e as únicas maneiras que temos para tentar nomear os números irracionais são através das aproximações por números racionais. A própria representação decimal é a aproximação por números racionais da forma $A/10^n$ (ou A/N^n, em base N). Duas outras formas de representar os números reais são as frações contínuas e os cortes de Dedekind.

A representação por frações contínuas tem a forma

$$N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \ldots}}$$

O algoritmo para construir a representação por frações contínuas de um número x é bastante simples. Em primeiro lugar, N_1 é a parte inteira de x (i.e. o maior número inteiro que é menor ou igual a x). Se $x – N_1 = 0$, acabou, senão, $x – N_1$ é maior que 0 e menor que 1, portanto $y = 1/(x – N_1)$ é um número maior que 1. Seja N_2 então a parte inteira deste número, o que equivale a dizer que $1/(N_2 + 1) < x – N_1 \leq 1/N_2$. Agora repita o processo com y no lugar de x (i.e. N_3 é o número tal que $1/(N_3 + 1) <$ $y – N_2 \Leftarrow 1/N_3$), e assim por diante até chegar a um número inteiro ou continuando para sempre.

A representação por frações contínuas não tem o mesmo problema da representação decimal (cada número real tem uma e somente uma representação por frações contínuas), mas tem outros inconvenientes. O primeiro, que não é tão sério assim, é que os números N_i, que seriam equivalentes aos dígitos, podem ser arbitrariamente grandes, ao contrário dos dígitos decimais que só podem ser de 0 a 9. O segundo, muito mais sério, é que é terrivelmente difícil fazer contas com frações contínuas. Este foi o principal motivo de a representação decimal ter substituído a numeração romana na Europa no século XV – era imensamente mais simples fazer contas com a representação decimal do que com a representação romana. (E este também é o principal motivo de a representação binária ter tomado espaço da representação decimal no século XX, é ainda mais fácil fazer contas em binário).

Outra representação dos números reais é através dos cortes de Dedekind. A diferença do corte de Dedekind para a representação decimal ou de frações contínuas é que, enquanto as últimas usam uma seqüência convergente de números racionais, os cortes usam conjuntos sem uma seqüência definida.

Um corte de Dedekind é um conjunto de números racionais limitado, que não possui um maior elemento e fechado inferiormente. Ou seja, um conjunto de racionais A tal que:

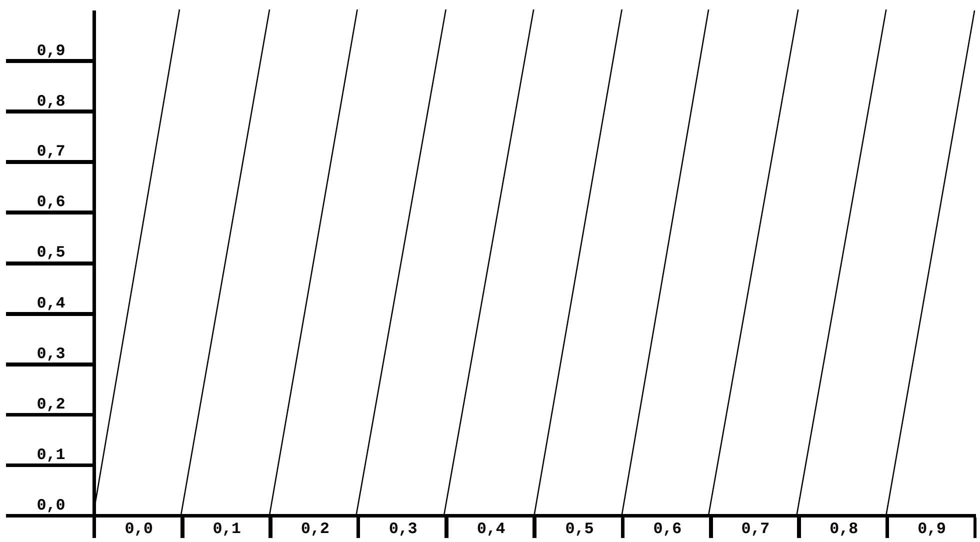
1) existe um racional $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{X} > \boldsymbol{a}$ para todo a pertencente a $\boldsymbol{A}$
2) para todo $\boldsymbol{a}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$, existe um $\boldsymbol{b}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$.
3) Se $\boldsymbol{a}$ pertence a $\boldsymbol{A}$, e um racional $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{a}$, então $\boldsymbol{c}$ pertence a $\boldsymbol{A}$.

Em outras palavras, cada um destes conjuntos é o conjunto de todos os números racionais menores que um número real determinado.
Esta representação é útil teoricamente para provar algumas propriedades dos números reais, mas é praticamente impossível de ser utilizada na prática para as tarefas corriqueiras do dia-a-dia.

A conclusão é que, apesar dos seus defeitos, a representação de base N é a representação mais prática que temos para os números reais. Então vamos entendê-la mais a fundo.

Em primeiro lugar, a parte antes da vírgula (ou ponto decimal, dependendo de em qual lugar do mundo você vive) é apenas a parte inteira do número, com a nossa velha e bem comportada representação decimal de números inteiros. Vamos nos concentrar então na parte à direita da vírgula, os números entre 0 e 1.

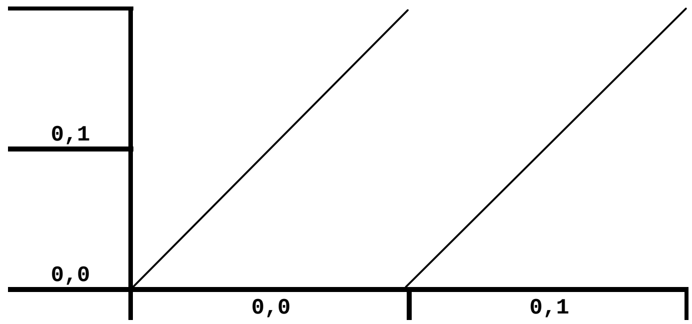
O primeiro dígito decimal diz em qual dos dez intervalos acima o número está. Para descobrir o segundo dígito, basta subdividir cada intervalo novamente em 10 pedaços, ou, equivalentemente, multiplicar o número por 10 e ver em qual dos intervalos a parte fracionária deste novo número (10*x*) cai, de acordo com o gráfico abaixo:



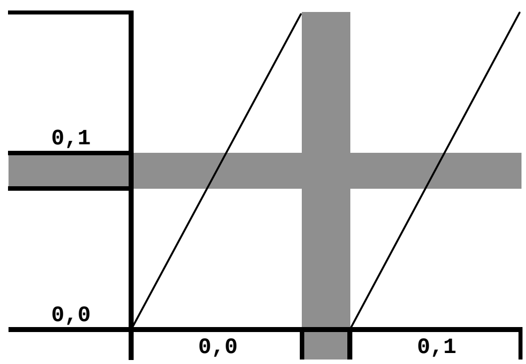
Os pontos onde nasce o nosso problema são justamente estes pontos marcados na nossa linha (0; 0,1; 0,2; ...; 1). Repare que o gráfico acima é descontínuo nestes pontos – por exemplo, as imagens dos pontos se aproximando de 0,2 pela esquerda tendem a 1, enquanto pela direita tendem a 0. Dito de outra forma, os números se aproximando pela esquerda de 0,2 vão ter uma seqüência longa de 9's depois do 0,1 e pela direita uma seqüência longa de 0's depois do 0,2.

Antes de prosseguir com a análise, já vimos que não existe nada de especial no número 10, portanto, por pura preguiça, a partir de agora vou mudar para base 2, mas deixo ao leitor desconfiado a tarefa de reescrever tudo o que se segue em base 10.

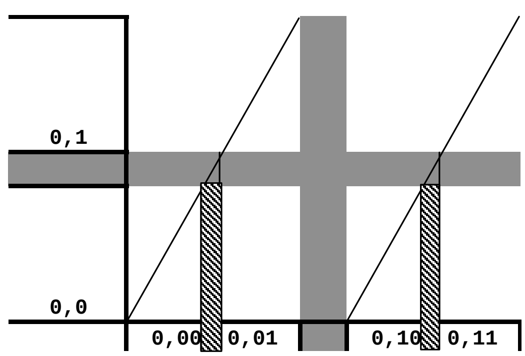
Apenas para começar do ponto onde paramos, o gráfico acima para base 2 fica assim:



Relembrando, o problema está no ponto da descontinuidade, neste caso o 0,1 (também conhecido como ½). A origem do problema é o fato de haver números começados por 0,0 arbitrariamente próximos de 0,1, quando, naturalmente, números começados por 0,0 deveriam ser distintamente menores do que 0,1. Vamos tentar corrigir este problema dando um pequeno espaço entre os intervalos no nosso desenho.



Vamos passar agora para o segundo dígito.



O espaço que demos entre os intervalos do primeiro dígito naturalmente se propaga para o segundo dígito (senão teríamos o mesmo problema nos números 0,01 – ¼ - e 0,11 – ¾). [Em base 10 seriam 9 buracos na primeira rodada e 90 na segunda, entenderam a minha preguiça?]

Neste ponto, já não é difícil imaginar o processo para o terceiro dígito – criar mais um buraco no meio de cada um dos 4 intervalos restantes, e assim por diante.

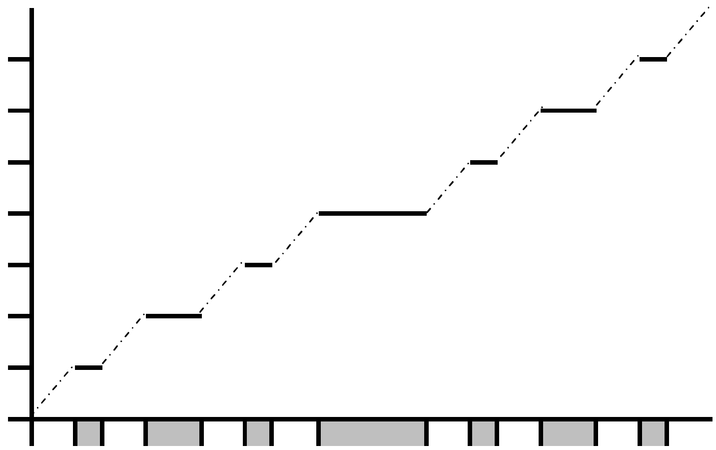
O conjunto dos números que sobram depois de fazermos este processo infinitas vezes é um conjunto em que podemos usar a nossa representação de base 2 (ou base 10, se fizermos o processo no desenho original lá de cima) sem medo – cada número tem apenas uma representação, e elas respeitam a ordem e as distâncias que esperaríamos: por exemplo, se um número começa por 0,11010 ele é estritamente menor que qualquer número que comece por 0,11011. O único problema é que o conjunto que temos no final deste processo é tão esfarelado que ele não contém nem um intervalinho que seja. Se escolhêssemos um número entre 0 e 1 aleatoriamente, ele teria 0% de chance de estar no nosso conjunto – repare que eu disse 0% não uma em um quaquilhão elevado a um googleplex, não a chance de ganhar na megasena todas as semanas pelo resto da vida, mas zero!

Este conjunto é tão importante que tem um nome – conjunto de Cantor, em homenagem ao matemático Georg Cantor que, entre outras coisas criou a teoria dos conjuntos (todos os conjuntos então são um pouquinho conjuntos de Cantor) e provou que existiam mais números irracionais do que números racionais. Dado que acabamos de ver que o próprio sistema de representação decimal que usamos todos os dias na verdade é um conjunto de Cantor, é de se admirar que apenas no final do século XIX tenhamos passado a conhecê-lo.

Pelo que acabamos de ver, o nosso sistema de numeração é um mapeamento entre um conjunto de Cantor e o intervalo [0,1]. O cerne da nossa questão é que esta função não é injetiva, ou seja, existem elementos distintos ***a*** e ***b*** no conjunto de Cantor que são mapeados para o mesmo número real (***a*** diferente de ***b***, ***f*(*a*)** = ***f*(*b*)**), por exemplo, 0,19999... e 0,2. [Parênteses: outra forma de ver isto é afirmar que o intervalo [0,1] é o espaço quociente do conjunto de Cantor pela relação de equivalência entre os números terminados por 999... e os seus correspondentes terminados por 000..., ver o artigo Egalité] no endereço:

http://www.impa.br/~gugu/pablo-egalite.doc

Vamos tentar desenhar o gráfico desta função:



Os dois extremos do buraco do meio são os pontos 0,01111.... e 0,10000... que representam o mesmo número ½, portanto a função é constante igual a ½ neste intervalo. Da mesma forma cada um dos buracos de “gerações” maiores corresponde a diferentes platôs no gráfico. O mais surpreendente é que, depois de criarmos os infinitos platôs, o gráfico final é um gráfico contínuo, que é chamado de função de Cantor, ou de “escada do diabo” (porque sempre existem infinitos degraus entre quaisquer dois degraus da escada, você nunca conseguiria sair do lugar – assim como Aquiles correndo atrás da tartaruga). Infelizmente, é o que se tem quando se tenta botar um bloco quadrado em um buraco redondo, ou neste caso, botar um intervalo dentro de um conjunto de Cantor.

ALGORITMO DE GOSPER E APLICAÇÕES

Humberto Silva Naves

- Nível Avançado

Continuando com as idéias do artigo "Integrais discretas" (de Eduardo Poço na Eureka número 27), vamos tentar descobrir "fórmulas fechadas" para alguns somatórios da forma:

$$(*)\sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Algumas considerações devem ser feitas antes de continuarmos:

1- Vamos assumir que z_k é uma seqüência hipergeométrica, isto é, a razão $r(k) \equiv z_{k+1} / z_k$ é uma função racional de *k*.

2- Por "fórmula fechada", entendemos que existe uma seqüência hipergeométrica s_n tal que $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_k$ (essa definição não é tão restritiva assim, pois veremos que a classe das seqüências hipergeométricas é bastante ampla).

Por exemplo, vamos tentar achar uma fórmula fechada para:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_k \text{, onde } z_k = \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}}$$

Claramente z_k é hipergeométrica, uma vez que $r(k) = z_{k+1} / z_k = \dfrac{(2k+1)^2}{4(k+1)(k+2)}$ é uma função racional de *k*. Por (*), vale:

$$z_n = s_{n+1} - s_n \Leftrightarrow \frac{z_n}{s_n} = \frac{s_{n+1}}{s_n} - 1$$

A nossa fórmula fechada s_n é hipergeométrica, logo $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n} - 1\right)^{-1}$ é uma função racional *y*(*n*), portanto:

$s_n = y(n) \cdot z_n \Leftrightarrow y(n+1) z_{n+1} - y(n) z_n = z_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r(n)y(n+1)-y(n)=1$

onde: $r(n)=\dfrac{(2n+1)^2}{4(n+1)(n+2)}$

Como $y(n)$ é racional, existem polinômios $P(n),Q(n)$ com $mdc\{P(n),Q(n)\}=1$ tais que $y(n)=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ e substituindo na equação anterior, vale:

$$(2n+1)^2P(n+1)Q(n)-4(n+1)(n+2)Q(n+1)P(n)=$$
$$=4(n+1)(n+2)Q(n+1)Q(n),\forall n\geq 0$$

Disto concluí-se que:

1- $Q(n)\,|\,4(n+1)(n+2)Q(n+1)$
2- $Q(n+1)\big|(2n+1)^2Q(n)\Leftrightarrow Q(n)\big|(2n-1)^2Q(n-1)$

(Observação: todas as relações de divisibilidade e os *mdc*´s referencem-se aos polinômios em si e não aos seus valores em um dado ponto)

Por (1), temos que se α é uma raiz de *Q* então: α = –1 ou α = –2 ou α + 1 é raiz de *Q*. E por (2) se α é raiz de *Q* então: $a = 1/2$ ou α – 1 também é raiz de *Q*. Portanto, como *Q* não pode ter infinitas raízes, *Q* não possui raiz alguma, isto é, *Q*(*n*) é constante (sem perda de generalidade, *Q*(*n*) = 1).

Disto concluí-se que:

$$(2n+1)^2P(n+1)-4(n+1)(n+2)P(n)=4(n+1)(n+2)$$

Logo: $(n+1)(n+2)\big|P(n+1)\Leftrightarrow n(n+1)\big|P(n)$, daí $P(n)=n(n+1)\overline{P}(n)$, então vale:

$(2n+1)^2\overline{P}(n+1)-4n(n+1)\overline{P}(n)=4,$ onde $\overline{P}(n)$ é um polinômio

Seja $d=\deg\overline{P},\overline{P}(n)=a_dn^d+...+a_0;$ substituindo na equação anterior, vale (para o caso $d > 0$):

$$(4n^2+4n+1)(a_d(n+1)^d+...+a_0)-(4n^2+4n)(a_dn^d+...+a_0)=4\Leftrightarrow$$
$$(4n^2+4n+1)(a_dn^d+(a_{d-1}+da_d)n^{d-1}+...)$$
$$-(4n^2+4n)(a_dn^d+a_{d-1}n^{d-1}+...)=4\Leftrightarrow$$

$4da_d n^{d+1} + ... = 4$

Mas, se $d > 0$, $4da_d n^{d+1} + ... = 4$ é um polinômio de grau d + 1. Portanto $d = 0 \Rightarrow \overline{P}(n) = 4$ (que de fato é solução da equação anterior), donde concluímos que: $y(n) = 4n(n+1)$, logo:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}} = 4n(n+1)\frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}} = \frac{n\binom{2n}{n}^2}{4^{2n-1}}$$

(é fácil ver que a fórmula vale para n = 0 e n = 1, e, pela identidade que provamos, vale sempre).

Vamos agora generalizar essa idéia para qualquer seqüência hipergeométrica z_k. O leitor atento deve ter notado que na conclusão de que $Q(n)$ = 1, implicitamente usamos o fato que: $mdc\{A(n), B(n+h)\} = 1$, para qualquer inteiro $h \geq 0$, onde $A(n) = (2n+1)^2$, e $B(n) = 4(n+1)(n+2)$, são o numerador e o denominador de $r(n)$ respectivamente.

Mas nem sempre é possível escrever $r(n) = {}^{z_{n+1}}\!/_{z_n}$ como a razão de dois polinômios satisfazendo as condições:

$mdc\{A(n), B(n+h)\} = 1, \forall h \in \mathbb{Z}_+$.

O leitor pergunta: "Então essa técnica não se aplica para todos os casos?!?!?".

O autor responde: "Não se desesperem!", uma vez que é possível escrever $r(n)$ da seguinte forma:

$$(**) r(n) = \frac{A(n)}{B(n)} \frac{C(n+1)}{C(n)}$$

onde $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ são polinômios tais que: $mdc\{A(n), B(n+h)\} = 1, \forall h \in \mathbb{Z}_+$.

Não vamos demonstrar esse fato aqui (pois é um dos exercícios deste artigo), mas vamos exibir um exemplo bem ilustrativo! Como escrever $r(n) = \dfrac{(n+4)(n+3)}{n^2(n+1)}$ da forma (**)?

Note que:

$$r(n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+4}{n}\cdot\frac{n+3}{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{A(n)}{B(n)}\frac{C(n+1)}{C(n)},$$

onde $A(n) = 1$, $B(n) = n$ e $C(n)=n(n+1)^2(n+2)^2(n+3)$.

De forma geral se α é uma raiz do denominador de $r(n)$ e $\alpha - h$ é uma raiz do numerador de $r(n)$, onde $h\in\mathbb{Z}_+$, então vale:

$$\frac{n-(\alpha-h)}{n-\alpha}=\frac{n-\alpha+h}{n-\alpha+h-1}\cdot\frac{n-\alpha+h-1}{n-\alpha+h-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-\alpha+1}{n-\alpha}=\frac{T(n+1)}{T(n)}$$

Onde $T(n)=(n-\alpha+h-1)(n-\alpha+h-2)\cdots(n-\alpha)$

Vamos tentar usar a fórmula (**) em

$r(n)\,y(n+1)-y(n)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y(n+1)\frac{A(n)}{B(n)}\cdot\frac{C(n+1)}{C(n)}-y(n)=1$$

Como $y(n)$ é racional em n, podemos fazer a substituição $y(n)=\dfrac{B(n-1)}{C(n)}\overline{y}(n)$, portanto:

$$A(n)\overline{y}(n+1)-B(n-1)\overline{y}(n)=C(n)\quad (***)$$

Agora o milagre acontece! Se $\overline{y}(n)$ é uma função racional que satisfaz (***), então $\overline{y}(n)$ é um polinômio! Se $\overline{y}(n)=\dfrac{\overline{P}(n)}{\overline{Q}(n)}$, com $mdc\{\overline{P}(n),\overline{Q}(n)\}=1$, então:

$$A(n)\overline{P}(n+1)\overline{Q}(n)-B(n-1)\overline{P}(n)\overline{Q}(n+1)=C(n)\overline{Q}(n)\overline{Q}(n+1)$$

Logo:

1- $\overline{Q}(n)\,\big|\,B(n-1)\overline{Q}(n+1)$
2- $\overline{Q}(n+1)\,\big|\,A(n)\overline{Q}(n)\Leftrightarrow\overline{Q}(n)\,\big|\,A(n-1)\overline{Q}(n+1)$

Logo se α é raiz de $\overline{Q}$, então:

1- α é raiz de $B(n-1)$ ou α é raiz de $\overline{Q}(n+1)$

2- α é raiz de $A(n-1)$ ou α é raiz de $\overline{Q}(n-1)$

Como $mdc\{A(n), B(n+h)\} = 1,\ \forall h \in \mathbb{Z}_+,\ \overline{Q}(n) = 1.$

Vamos agora resolver a seguinte equação polinomial:

$$A(n)\overline{y}(n+1) - B(n-1)\overline{y}(n) = C(n), \text{ onde } \overline{y}(n) = a_d n^d + \ldots + a_0$$

Temos casos a considerar

1- $\deg A \neq \deg B$
2- $\deg A = \deg B$ e $d\,A \neq d\,B$ ($d\,A$ é o coeficiente líder de A):
 Nesses casos, pela equação (***), vale:
 $\deg C = \deg \overline{y} + max\{\deg a, \deg b\} \Leftrightarrow$
 $d = \deg C - max\{\deg A, \deg B\}$.
3- $\deg A = \deg B = m$ e $d\,A = d\,B = k$
 Se $d > 0$, então:

$$(kn^m + an^{m-1} + \ldots)(a_d(n+1)^d + \ldots + a_0) - (kn^m + bn^{m-1} + \ldots)(a_d n^d + \ldots + a_0) = C(n) \Leftrightarrow$$

$$(kn^m + an^{m-1} + \ldots)(a_d n^d + (a_{d-1} + da_d)n^{d-1} + \ldots) - (kn^m + bn^{m-1} + \ldots)(a_d n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \ldots) = C(n) \Leftrightarrow$$

$$[(a \cdot a_d + k(a_{d-1} + da_d)) - (b \cdot a_d + ka_{d-1})]n^{m+d-1} + \ldots = C(n)$$

Se $(a-b) \cdot a_d + kda_d = 0 \Rightarrow d = \dfrac{b-a}{k}$, mas se

$(a-b) \cdot a_d + kda_d \neq 0 \Rightarrow \deg C = m + d - 1 \Rightarrow d = \deg C - \deg A + 1$

Em todos os casos, é possível calcular o valor de d e uma vez calculado o valor de d, a equação polinomial se transforma em um sistema linear com d variáveis que pode ser resolvido (quando possível) usando técnicas básicas de álgebra linear.

Exercícios:

1) Calcule os seguintes somatórios

 a) $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k^2 + \sqrt{5}k - 1}$

 b) $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}}$

c) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 a^k$

2) Prove que qualquer função racional $r(n)$, pode ser escrita como: $r(n) = \dfrac{A(n)C(n+1)}{B(n)C(n)}$ com $mdc\{A(n), B(n+h)\} = 1, \forall h \in \mathbb{Z}_+$ e $mdc\{A(n), C(n)\} = mdc\{B(n), C(n+1)\} = 1$ (o leitor atento novamente notará que adicionamos duas novas restrições).

3) Prove que a menos de multiplicações por constantes, $A(n)$, $B(n)$ e $C(n)$ são únicos no exercício anterior (a forma acima chama-se “forma canônica”).

4) Dizemos que duas seqüências hipergeométricas são similares, quando a razão dos duas é uma função racional e neste caso, escrevemos $s_n \sim t_n$. Prove:

a) Se s_n é não constante, então $\Delta s_n \sim s_n$, onde $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$.

b) Se s_n e t_n são hipergeométricas, e $s_n + t_n \neq 0$ então $s_n + t_n$ é hipergeométrica se e somente se $s_n \sim t_n$. (Esse resultado pode levar o leitor a indagar sobre a nossa suposição inicial do que seria uma “fórmula fechada” ser algo bem restritivo).

c) Se $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(m)}$ são hipergeométricas e vale $\sum_{i=1}^{m} t_n^{(i)} = 0$, então $t_n^{(i)} \sim t_n^{(j)}$ para algum i, j com $1 \leq i < j \leq m$.

d) Se vale $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = t_n^{(1)} + t_n^{(2)} + \ldots + t_n^{(m)}$, onde $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(m)}$ e z_n são hipergeométricas, então $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ é hipergeométrica! (Ufa! De fato nossa definição de fórmula fechada não é tão restritiva assim).

DOMINGO REGADO A REPUNITS

Valberto Rômulo Feitosa Pereira
Cefetce – Uned Cedro

- Nível Iniciante

No final do ano de 2007 fui convidade pelo professor e amigo Onofre Campos, por quem tenho admiração, para ministrar aulas para um jovem que não podia se locomover, pelo valor que eu iria receber pelas aulas, pensei que o rapaz pertencia a uma família muito rica; grande foi a minha surpresa ao perceber justamente o contrário: em segunda conversa com o supra-citado professor, soube da frágil situação financeira do jovem aluno, mas também, por outro lado, do seu incrível potencial e de sua força de vontade, fatos que me entusiasmaram em conhecê-lo. Este aluno era Ricardo Oliveira, o qual havia conquistado duas medalhas de Ouro na OBMEP.

No último encontro que tive com Ricardo, em sua residência, ainda promovido pelo projeto de iniciação científica, deparamo-nos com o seguinte problema:

"O inteiro A é formado por 666 algarismos iguais a 3*, e o número B por* 666 *algarismos iguais a* 6*. Que algarismos apareceram no produto AB?"*

Enquanto Ricardo fazia uma atividade, eu folhava uma apostila que continha as colunas semanais – Olimpíada de Matemática – do jornal *O Povo* em parceria com o Departamento de Matemática da UFC. Neste momento, vi o problema acima e falei:

- Olha Ricardo que belo problema!

Nesse instante Ricardo para sua atividade, lê o problema e passa a resolvê-lo. Eu também caio na tentativa de resolvê-lo, lembrei que:

$$\underbrace{111111...11}_{n \text{ algarismos } 1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

Minha solução com o uso desta informação saiu; Ricardo sem esta informação errou por um algarismo. Expliquei a Ricardo minha solução, percebemos que a informação que eu havia usado era importante. A aula continuou, mas ainda fiquei pensando como esta igualdade daria para resolver belos problemas.

No dia seguinte tive uma conversa com meu amigo Secco, olímpico do Rio de Janeiro. Perguntei-lhe se conhecia problemas que em sua solução usava esta igualdade; Secco falou que conhecia e mais ainda: estes números eram chamados de *Repunits* e indicou [4]. Com a dica de Secco e o entusiasmo de Ricardo, cataloguei cinco problemas da antiga coluna, os quais passaremos a resolver. Também apresentei aos meus alunos do projeto OBMEP 2008, realizado no Cefet, Uned de Cedro-Ce.

1. REPUNITS

Os Repunits são números que só têm algarismos 1, por exemplo:

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ ...$$

Estes números podem ser escritos de outra forma, vejamos:

$$\underbrace{111...1}_{k} = \frac{\overbrace{999...9}^{k}}{9} = \frac{1\overbrace{000...0}^{k}-1}{9} = \frac{10^k-1}{9}.$$

A beleza destas informações é poder resolver problemas interessantes sem usar técnicas sofisticadas.

2. EXEMPLOS

Exemplo 1: *O inteiro positivo n é formado de k algarismos* 9. *Mostre que a soma de todos os algarismos de* n^2 *é igual a* $9k$.

Demonstração: Pelas hipóteses temos

$$N = \underbrace{999...9}_{k} = 9(111...1) = 9\frac{10^k-1}{9} = 10^k - 1.$$

Calculemos N^2 da seguinte forma:

$$N^2 = N.N$$

$$N^2 = (999...9).(10^k - 1)$$

$$N^2 = \underbrace{999...9}_{k}\underbrace{000...0}_{k} - \underbrace{999...9}_{k}$$

$$N^2 = \underbrace{999...9}_{k-1}8\underbrace{000...0}_{k-1}1$$

A soma dos algarismos é: $9(k-1)+8+1 = 9k.$

Exemplo 2: *Mostre que os números* 49, 4489, 444889, ..., *obtidos colocando o número* 48 *no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.*
Demonstração: Vejamos as igualdades:

$$49 = 4.1.10^1 + 8.1 + 1$$

$$4489 = 4.11.10^2 + 8.11 + 1$$

$$444889 = 4.111.10^3 + 8.111 + 1$$

De modo geral temos: $N = \underbrace{444...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9 = 4.\underbrace{111...1}_{n}.10^n + 8.\underbrace{111...1}_{n} + 1.$

Substituindo $\underbrace{11...11}_{n} = \dfrac{10^n - 1}{9}$ na expressão acima ficamos:

$$N = \frac{4}{9}(10^n - 1).10^n + \frac{8}{9}(10^n - 1) + 1$$

$$N = \frac{4}{9}10^{2n} - \frac{4}{9}10^n + \frac{8}{9}10^n - \frac{8}{9} + 1$$

$$N = \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2$$

O número $2.10^n + 1$ é múltiplo de 3, portanto N é um quadrado perfeito.

Exemplo 3: *Para cada inteiro positivo n, sejam A*(*n*) *e B*(*n*) *dois números inteiros formados por* 2*n algarismos iguais a* 1 *e n algarismos iguais a* 2 *respectivamente. Mostre que A*(*n*) – *B*(*n*) *é um quadrado perfeito.*
Demonstração. Pelas hipóteses temos:

$$A(n) - B(n) = \underbrace{111...1}_{2n} - \underbrace{222...2}_{n}$$

Como $\underbrace{222...2}_{n} = 2\dfrac{10^n - 1}{9}$ e $\underbrace{111...1}_{2n} = \dfrac{10^{2n} - 1}{9}$, substituindo teremos:

$$A(n) - B(n) = \frac{10^{2n} - 1}{9} - 2\frac{10^n - 1}{9}$$

$$A(n) - B(n) = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{9} - 2\frac{10^n - 1}{9}$$

$$A(n) - B(n) = \frac{(10^n - 1)[(10^n + 1) - 2]}{9}$$

$$A(n) - B(n) = \frac{(10^n - 1)^2}{9}$$

$$A(n) - B(n) = \frac{(10^n - 1)^2}{3^2}.$$

Assim $A(n) - B(n)$ é quadrado perfeito.

Exemplo 4: *Sem efetuar a multiplicação, calcule o valor de* $(999.999.999)^2$.

Solução: Vamos escrever a expressão $(999.999.999)^2$ da seguinte maneira:

$$(999.999.999)^2 = \left(9.\frac{10^9 - 1}{9}\right)^2 = 10^{18} - 2.10^9 + 1 = 1\underbrace{000...0}_{18-\text{zeros}} - 2\underbrace{000...0}_{9-\text{zeros}} + 1$$

fazendo as contas ficamos:

$$(999.999.999)^2 = \underbrace{999...9}_{8-\text{noves}}8\underbrace{000...0}_{8-\text{zeros}}1$$

Finalmente o problema motivdor do nosso trabalho.

Exemplo 5: *O inteiro A é formado por* 666 *algarismos iguais a* 3, *e o número B por* 666 *algarismos iguais a* 6. *Que algarismos apareceram no produto AB?*

Solução: Como $A = \underbrace{666...6}_{666} = 6.\underbrace{111...1}_{666}$ e $B = \underbrace{333...3}_{666} = 3.\underbrace{111...1}_{666} = 3.\frac{10^{666} - 1}{9}$, vamos calcular AB mas usando alguns artifícios, como segue abaixo:

$$AB = 3.6.(111...1).\frac{10^{666} - 1}{9}$$

$$AB = 2.(111...1)(10^{666} - 1)$$

$$AB = (222...2)(10^{666} - 1)$$

$$AB = (222...2).10^{666} - 222...2$$

$$AB = \underbrace{222...2}_{666}\underbrace{000...0}_{666} - \underbrace{222...2}_{666}$$

$$AB = \underbrace{222...2}_{665}1\underbrace{777...7}_{665}8$$

Logo apareceram no produto *AB*:

- Um algarismo 1;
- Um algarismo 8;
- 665 algarismos 2;
- 665 algarismos 7.

3. PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Achar a soma: $2+22+...+222...2$
se a última parcela tem *n* algarismos iguais a 2.

2. Prove que: $\underbrace{111...1}_{2n} = \underbrace{222...2}_{n} + (\underbrace{333...3}_{n})^2$.

3. Prove que se $\underbrace{111...1}_{n}$ divisível por 41 se e somente se *n* é divisível por 5.

4. Mostre que nenhum inteiro da seqüência: $11, 111, 1111, 11111, ...$ é um quadrado perfeito.

5. Mostrar que os inteiros: $1111, 111111, ...,$ cada um dos quais é formado por um número par de algarismos 1, são compostos.

Nota dos editores: Não é difícil mostrar que se $\underbrace{111...1}_{n}$ é primo então *n* é primo (exercício!) . Os únicos valores de *n* para os quais se sabe provar atualmente que $\underbrace{111...1}_{n}$ é primo são 2, 19, 23, 317 e 1031. Recentemente (entre 1999 e 2007) foram descobertos os seguintes valores de *n* tais que $\underbrace{111...1}_{n}$ é *provavelmente* primo (i.e., passa por diversos testes probabilísticos de primalidade): 49081, 86453, 109297 e 270343. De acordo com os testes já realizados, qualquer outro repunit primo deve ter mais de 400.000 algarismos.

REFERÊNCIAS

[1] Emanuel Carneiro, Francisco Antonio M. de Paiva, Onofre Campos, **Olimpíadas Cearenses de Matemática do Ensino Fundamental,** Edições Realce Editora e Indústria Gráfica, Fortaleza, 2006.

[2] Alencar Filho, Edgar de, **Teoria Elementar dos Números**, Nobel, São Paulo, 1988.

[3] Coluna Semanal **Olimpíadas de Matemática, Jornal O Povo em parceria com o Departamento de Matemática da UFC,** No. 01, ao No. 200.

[4] Titu Andreescu, Razvan Gelca, **Mathematical Olympiad Challenges,** 2000.

HOMOTETIAS, COMPOSIÇÃO DE HOMOTETIAS E O PROBLEMA 6 DA IMO 2008

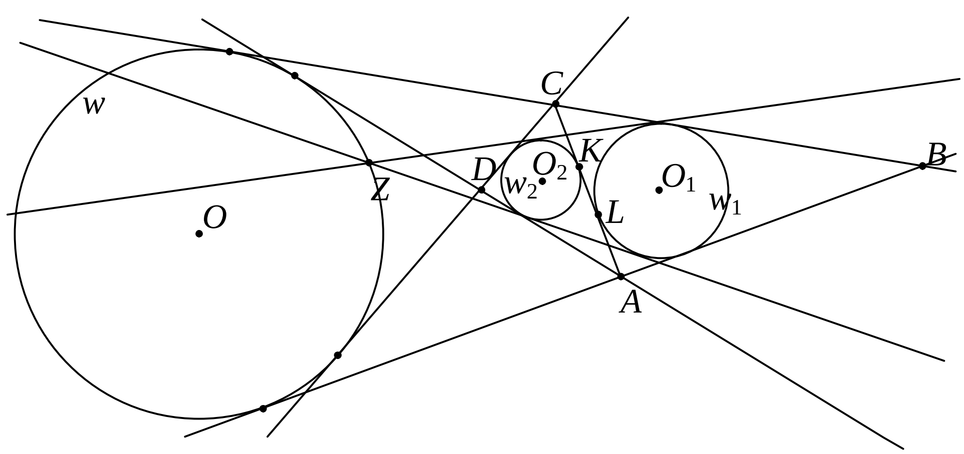
Carlos Yuzo Shine

- Nível Avançado

Antes de começar a discussão, vamos enunciar o problema 6 da IMO 2008, que é a motivação principal desse artigo.

Problema 6, IMO 2008. Seja *ABCD* um quadrilátero convexo cujos lados *BA* e *BC* têm comprimentos diferentes. Sejam w_1 e w_2 as circunferências inscritas nos triângulos *ABC* e *ADC*, respectivamente. Suponhamos que existe uma circunferência w tangente à reta *BA* de forma que *A* está entre *B* e o ponto de tangência, tangente à reta *BC* de forma que *C* está entre *B* e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas *AD* e *CD*. Prove que as tangentes comuns exteriores a w_1 e w_2 se intersectam sobre *w*.

É claro que um problema de geometria não pode ficar sem um bom desenho. É razoavelmente difícil desenhar a figura do problema e sugerimos que o leitor tente fazê-lo por conta própria (dica: comece com o círculo w). Não se perca: queremos provar que o ponto *Z* está sobre a circunferência *w*.



Quem já estudou homotetia já deve ter enxergado diversas homotetias entre as circunferências, mas muitos dos mais poderosos olímpicos do mundo foram derrotados por esse problema. De fato, dos 535 estudantes que participaram da IMO 2008, somente 13 resolveram (um deles fez 6 pontos) e 53 conseguiram pelo menos um ponto. Isto quer dizer que mais de 90% dos estudantes zeraram o problema!

Isso é sinal de que esse problema deve ter algo novo para ser explorado. De fato, uma transformação geométrica que esteve em voga nos anos 80 e desapareceu nos anos 90 foi a homotetia. E ela voltou, discretamente em 2007 e com tudo em 2008!

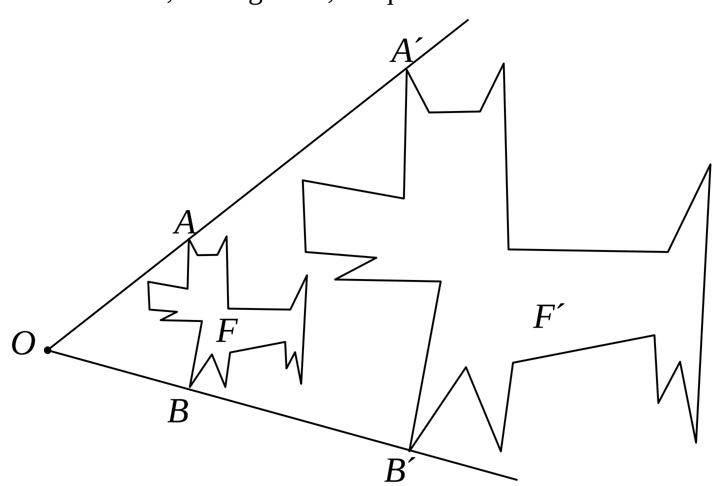
Vamos definir homotetia, ver algumas de suas propriedades e expandir as adéias envolvidas nessa transformação.

1. Homotetia: definição

Você vai ver que homotetia nada mais é do que "fazer sombrinha". Aparecem muitos paralelismos, mas o mais interessante são as colinearidades que irão aparecer. No início parece mágica; mas um bom matemático sempre revela seus truques!

Vamos começar com a definição de *homotetia com razão positiva ou homotetia direta:*

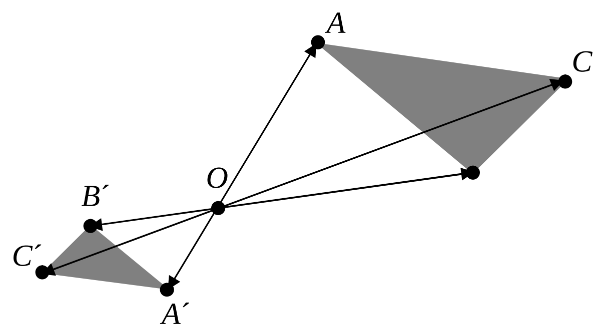
Definição 1.1. Homotetia de uma figura F com centro O e razão k, um número real positivo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de F o ponto P' sobre a semi-reta OP, de origem O, tal que $OP' = k \cdot OP$.



Talvez com vetores seja mais interessante: sendo O o centro da homotetia, o ponto P é transformado no ponto P' de modo que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$. Note que a homotetia é uma função s que leva pontos do plano (ou do espaço, se você estiver trabalhando em dimensões maiores) a pontos do plano (espaço). De fato, podemos fazer $P' = s(P)$, tal que $s(P) - O = k \cdot (P - O) \Leftrightarrow s(P) = O + k \cdot (P - O)$.

Com isso, podemos definir homotetias para k negativo também, obtendo as chamadas *homotetias de razão negativa ou homotetias inversas:*

Definição 1.2. *Homotetia de uma figura F com centro O e razão k, sendo k um número real negativo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de F o ponto P´sobre a reta OP, de origem O, tal que* $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.



2. Propriedades da homotetia

As principais propriedades de homotetias têm a ver com colinearidade e concorrência. Algumas têm a ver com paralelismo.

2.1. Colinearidade

- *O centro de homotetia, o ponto e seu transformado são colineares. Em outras palavras,* O, P e $P' = s(P)$ são colineares. Isso decorre diretamente da definição, mas homotetias não vêm de graça!

Normalmente as encontramos nos problemas e, com essa propriedade, obtemos pontos colineares.

2.2. Concorrência

- *O centro de homotetia pertence a todas as retas que ligam pontos a seus transformados. Em outras palavras, O pertence a toda reta do tipo* $PP' = Ps(P)$. Novamente, uma propriedade que decorre diretamente da definição (na verdade, é a mesma da colinearidade!), mas que aparece quando descobrimos alguma homotetia.

2.3. Paralelismo

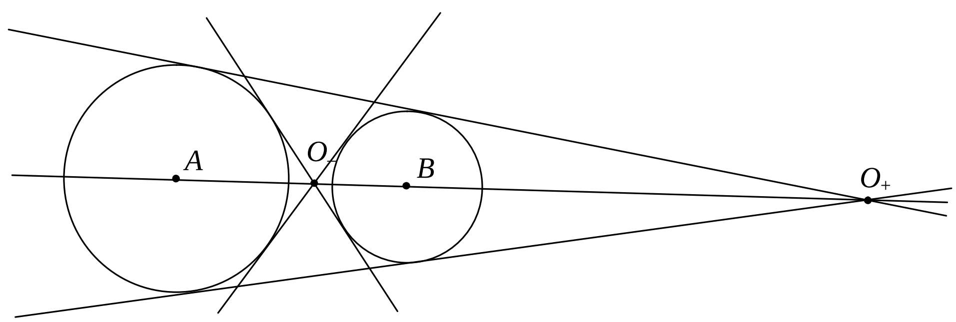
- A reta que liga dois pontos é paralela à reta que liga os seus tranformados. Em outras palavras, PQ e $P'Q' = s(P)s(Q)$ são paralelas. A demonstração desse fato vem da semelhança entre OPQ e $OP'Q'$ (pelo caso LAL').

- Dois triângulos com lados respectivamente paralelos são homotéticos. Para provar isso, sendo *ABC* e *DEF* os triãgulos com *AB*, *DE*, *AC*, *DF* e *BC*, *EF* respectivamente paralelos, use o teorema de Desargues para provar que esses triângulos são perspectivos.

Em particular, algumas figuras são sempre semelhantes: os círculos! Com isso, temos a seguinte propriedade:

2.4. Círculos

- *Dois círculos são sempre homotéticos*. Na maioria dos casos, eles admitem duas homotetias, uma direta e uma inversa. No caso de círculos disjuntos, os centros de homotetias são fáceis de encontrar: são as interseções das tangentes comuns internas (inversa) e das tangentes comuns externas (direta).



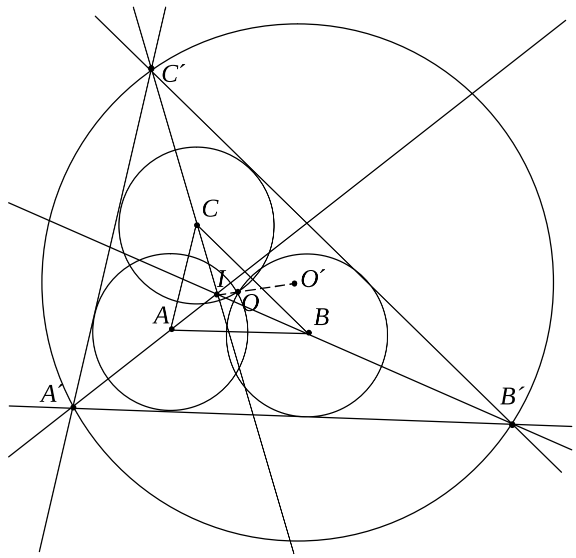
Com isso, podemos resolver alguns problemas. Homotetia esteve bastante na moda na IMO durante o início dos anos 80, como você vai ver nos exemplos e nos exercícios.

Exemplo 2.1.

Problema 5, IMO 1981. Três círculos congruentes têm um ponto comum *O* e estão no interior de um triângulo. Cada círculo é tangente a dois lados do triângulo. Prove que o incentro e o circuncentro do triângulo e o ponto *O* são colineares.

Resolução:
O nome do ponto dado não é *O* por acaso: sejam *A*, *B* e *C* os centros dos três círculos congruentes e $A'B'C'$ o triângulo cujos lados tangenciam esses três

círculos. Note que os raios dos círculos congruentes são $OA = OB = OC$, isto é, O é circuncentro de ABC. Além disso, das tangências dos círculos com os lados temos que AA', BB' e CC'são as bissetrizes do triângulo $A'B'C'$ e se interceptam no incentro I do triângulo.



As distâncias de A e B a $A'B'$ são iguais aos raios dos círculos congruentes a são, portanto, iguais.

Então AB e $A'B'$ são paralelos. Analogamente, AC é paralelo a $A'C'$ e BC é paralelo a $B'C'$, de modo que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são homotéticos. O centro de homotetia é I. Essa homotetia leva O ao circuncentro O' de $A'B'C'$. Assim, I, O e O' são colineares.

Note que a dificuldade foi *achar* a homotetia; depois bastou aplicar a propriedade de colinearidade.

Exercícios:

01. (Problema 2, IMO 1982) Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo escaleno com lados a_1, a_2 e a_3 (a_i é o lado oposto a A_i). Seja M_i o ponto médio do lado a_i e T_i o ponto onde o incírculo do triângulo toca o lado a_i, para i = 1, 2, 3. Seja S_i o simétrico de T_i em relação à bissetriz interna do ângulo A_i. Prove que as retas M_1S_1, M_2S_2 e M_3S_3 são concorrentes.

02. (Problema 2, IMO 1983) Seja *A* um dos dois pontos de interseção dos círculos C_1 e C_2, de centros O_1 e O_2, respectivamente. Uma das tangentes comuns aos círculos toca C_1 em P_1 e C_2 em P_2, e a outra toca C_1 em Q_1 e C_2 em Q_2. Seja M_1 o ponto médio de P_1Q_1 e M_2 o ponto médio de P_2Q_2. Prove que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

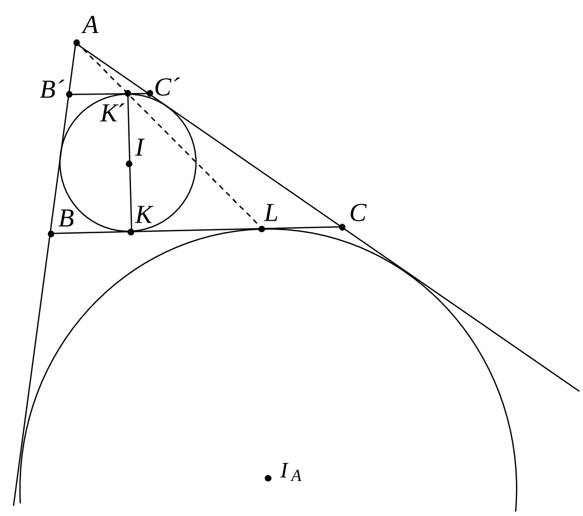
03. (Prova de seleção 2008, Banco da IMO 2007) As diagonais do trapézio *ABCD* cortam-se no ponto *P*. O ponto *Q* está na região determinada pelas retas paralelas *BC* e *AD* tal que $\angle AQD = \angle CQB$ e a reta *CD* corta o segmento *PQ*. Prove que $\angle BQP = \angle DAQ$.

3. O Fenômeno Homotético Circular

Algumas aplicações de certos teoremas são tão conhecidos quanto os próprios. Para homotetias, é o caso com o fenômeno homotético circular, que mostra uma colinearidade bastante interessante envolvendo incírculo e ex-incírculo.

Fenômeno Homotético Circular. Seja *ABC* um triângulo e sejam *K* e *L* os pontos de tangência do incírculo e ex-incírculo relativo a *A* em *BC*. Então *A*, *L* e o ponto *K´* diametralmente oposto a *K* no incírculo são colineares.

Demonstração:



Basta traçar a reta *B´C´* paralela a *BC* que tangencia o incírculo de *ABC* em *K´*. *ABC* e *AB´C´* são homotéticos com centro em *A*. Para terminar, o incículo de *ABC* é ex-incírculo de *AB´C´*, de modo que os pontos *K´*e *L* são correspondentes na homotetia e estão, portanto, alinhados com *A*.

Vale a pena lembrar também que, na figura acima, $BK = LC$.

Exercícios:

04 (Problema 4, IMO 1992) No plano, considere uma circunferência *C*, uma reta *L* tangente à circunferência e *M* um ponto da reta *L*. Encontre o lugar geométrico dos pontos *P* com a seguinte propriedade: existem dois pontos *Q*, *R* da reta *L* tais que *M* é o ponto médio de *QR* e *C* é a circunferência inscrita no triângulo *PQR*.

4. Composição de Homotetias

A principal inovação na IMO 2008 no problema 6 foi explorar o seguinte fato:

Composição de Homotetias. Se s_1 é uma homotetia de centro O_1 e s_2 é uma homotetia de centro O_2 então a composição de homotetias $s = s_2 \circ s_1$ é uma homotetia de centro *O*, e O_1, O_2 e *O* estão alinhados.

A única exceção é quando a composição s é uma translação.

Demonstração

Utilizaremos vetores para provar esse fato

Seja *P* um ponto qualquer e sejam k_1 e k_2 as razões de homotetia de s_1 e s_2, respectivamente. Então $s_1(P) = O_1 + k_1 \cdot (P - O_1)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} s(P) &= s_2 \circ s_1(P) = s_2(s_1(P)) = O_2 + k_2 \cdot (s_1(P) - O_2) \\ &= O_2 + k_2 \cdot (O_1 + k_1 \cdot (P - O_1) - O_2) \\ &= k_2(1-k_1) \cdot O_1 + (1-k_2) \cdot O_2 + k_1k_2 \cdot P \qquad (*) \end{aligned}$$

Primeiro, se s é uma homotetia, então sua razão é k_1k_2 (as figuras são "multiplicadas" por k_1 e depois por k_2; ou seja, são "multiplicadas" por k_1k_2). Assim, para provarmos que s é uma homotetia, temos que provar que existe um ponto *O* tal que

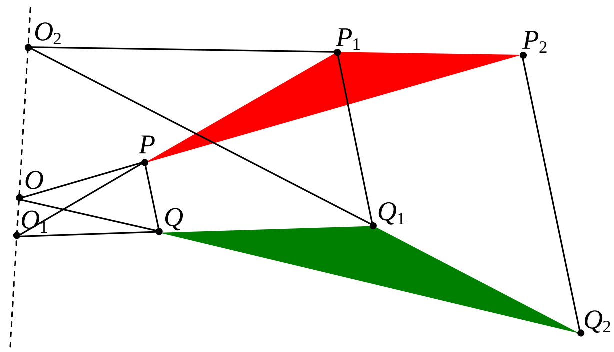
$$s(P) = O + k_1k_2 \cdot (P - O) = (1 - k_1k_2) \cdot O + k_1k_2 \cdot P \qquad (**)$$

Comparando os coeficientes em (*) e (**) concluímos que $(1-k_1k_2)O = k_2(1-k_1) \cdot O_1 + (1-k_2) \cdot O_2$. Se $k_1k_2 = 1$, s é uma translação (verifique!). Caso contrário, $O = \dfrac{k_2(1-k_1) \cdot O_1 + (1-k_2) \cdot O_2}{1-k_1k_2}$ e, como $k_2(1-k_1) + (1-k_2) = k_2 - k_1k_2 + 1 - k_2 = 1 - k_1k_2$, *O* é uma média ponderada de O_1 e O_2. Em outras palavras, *O* pertence à reta O_1O_2.

Os partidários da geometria sintética devem estar sentindo falta de uma demonstração sintética. Vamos provar a parte da colinearidade sinteticamente.

Demonstração sintética da colinearidade

Considere os pontos P e Q e seus transformados $P_1 = s_1(P), Q_1 = s_1(Q), P_2 = s_2(P_1) = s(P)$ e $Q_2 = s_2(Q_1) = s(Q)$.



Note que, das homotetias, PQ P_1Q_1 e P_2Q_2 são paralelos. Em termos projetivos, eles são concorrentes em um ponto do infinito. Isto quer dizer que os triângulos PP_1P_2 e QQ_1Q_2 são perspectivos e podemos aplicar o teorema de Desargues: as interseções entre lados correspondentes, $PP_1 \cap QQ_1 = \{O_1\}, P_1P_2 \cap Q_1Q_2 = \{O_2\}$ e $PP_2 \cap QQ_2 = \{O\}$ são colineares.

4.1 Detalhe técnico

Geralmente, trabalhamos com homotetias sinteticamente, e aparecem homotetias diretas e inversas. Homotetias inversas "multiplicam" figuras por fatores negativos, de modo que a composição de duas homotetias do mesmo tipo é direta e a composição de duas homotetias de tipos diferentes é inversa. Para facilitar, a homotetia inversa faz o papel do sinal de menos e a homotetia direta, do sinal de mais. Na composição de homotetias, seguimos a regra dos sinais da multiplicação.

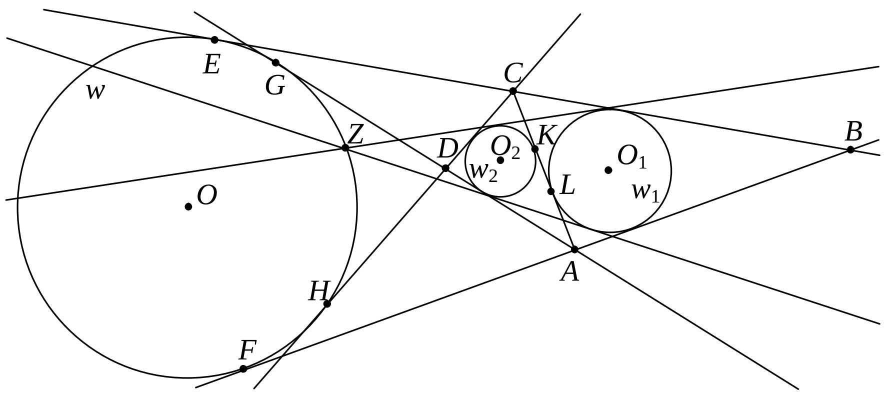
Agora estamos prontos para resolver o problema 6 da IMO 2008. Vamos reenunciar o problema e resolvê-lo.

Exemplo 4.1

Problema 6, IMO 2008. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados BA e BC têm comprimentos diferentes. Sejam w_1 e w_2 as circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Suponhamos que existe um circunferância w tangente à reta *BA* de forma que *A* está entre *B* e o ponto de tangência, tangente à reta *BC* de forma que *C* está entre *B* e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas *AD* e *CD*. Prove que as tangentes comuns exteriores a w_1 e w_2 se intersectam sobre w.

Resolução

Vamos começar trabalhando com segmentos tangentes.

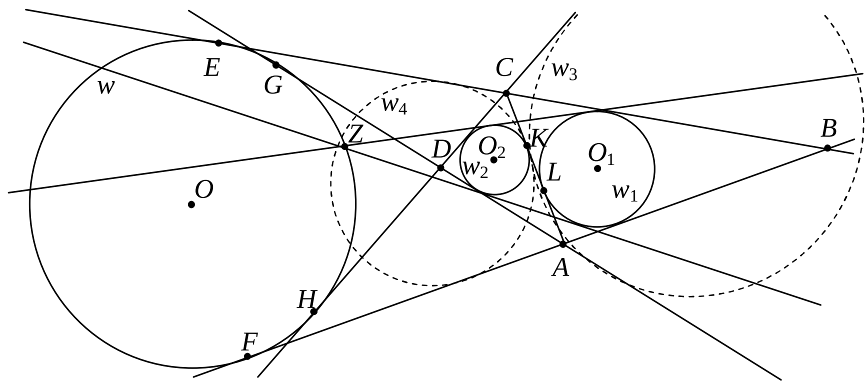


Temos $BE = BF$, $AF = AG$, $CE = CH$ e $DG = DH$. Então $AB = BF – AF = BE – AG = BC + CE – (AD + DG) = BC – AD + (CH – DH) = BC – AD + CD \Rightarrow AB + AD = BC + CD$. Note que esse fato depende somente de w ser tangente aos prolongamentos dos lados do quadrilátero *ABCD* (guarde esse fato, ele pode ser útil em outros problemas!). Isso implica

$$\frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{AC + AB - BC}{2} \Leftrightarrow CK = AL.$$

Essa igualdade é simples, mas abre muitas portas para nós! De fato, ela quer dizer que os ex-incírculos w_3 e w_4 relativos a *AC* dos triângulos *ABC* e *ADC* tocam *AC* em *K* e *L*, respectivamente. Isso nos dá muitas, mas muitas homotetias, e pelo menos duas oportunidades de utilizar o fenômeno hometético circular!

Desenhemos as circunferências:



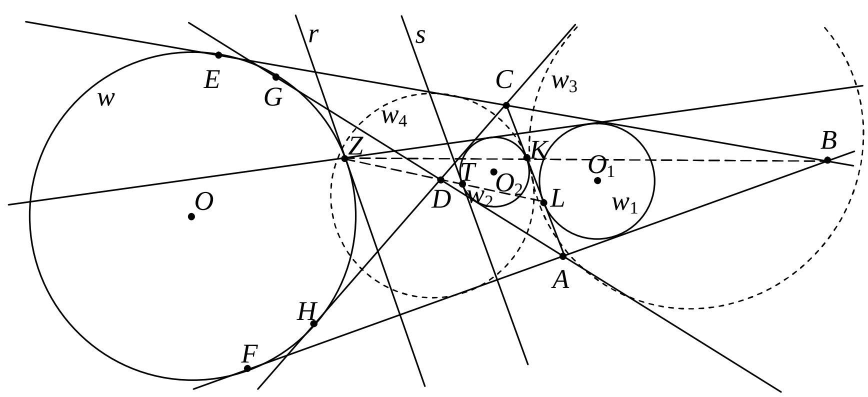
Vamos compor homotetias para descobrir colinearidades, utilizando w_3 e w_4 como "intermediários"!

- $w_2 \xrightarrow{s_{24}} w_4 \xrightarrow{s_{41}} w_1$ e $w_2 \xrightarrow{s_{21}} w_1$. O centro *K* da homotetia (direta) s_{24}, o centro *B* da homotetia (direta) s_{41} e o centro *Z* da homotetia (direta) s_{21} estão alinhados. Isso quer dizer que *Z* pertence à reta *BK*.

- $w_2 \xrightarrow{s_{23}} w_3 \xrightarrow{s_{31}} w_1$ e $w_2 \xrightarrow{s_{21}} s_1$. O centro *D* da homotetia (direta) s_{23}, o centro *L* da homotetia (direta) s_{31} e o centro *Z* da homotetia (direta) s_{21} estão alinhados. Isso quer dizer que *Z* pertence à reta *DL*.

  Com isso, concluímos que *Z* é a interseção de *BK* e *DL*.

Note que até agora não envolvemos o círculo *w* nas homotetias. Agora é hora, mas vamos provar colinearidades de outra forma. Seja *W* a interseção de *BK* e *w*. Provaremos que *W* = *Z*, resolvendo o problema.



Primeiro, note que a homotetia direta s_4 que leva w_4 a w tem centro B e, portanto, leva K a W. Mais ainda: como AC é tangente a w_4 em K, a reta r paralela a AC que passa por W é tangente a w, pois a reta AC é levada a r por s_4.
Agora, considere a homotetia inversa s_2 que leva w a w_2. Essa homotetia tem centro em D, leva W a T e r a s, que é paralela a r e AC e é tangente a w_2. Assim, D, W e T estão alinhados, ou seja, W pertence à reta DT.
Falta ainda identificar melhor o ponto T. Na verdade, ele é bem conhecido: como s e AC são paralelos, T e K são diametralmente opostos. Podemos, assim, aplicar o fenômeno homotético circular: D, T e L são colineares e L também pertence à reta DT.
Portanto D, L e W são colineares, de modo que W pertence a DL. Como W pertence, por definição, à reta BK, W é a interseção de BK e DL, e só pode ser igual a Z.

Observação: Note que a condição $AB \neq AC$ é importante para que as retas BK e DL não coincidam.

Exercícios

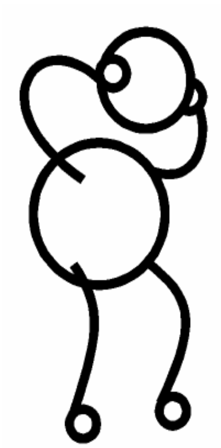
05. (Banco da IMO 2007) O ponto P pertence ao lado AB do quadrilátero convexo $ABCD$. Seja w o incírculo do triângulo DPD e I o seu incentro. Suponha que w é tangente aos incírculos dos triângulos APD e BPC em K e L, respectivamente. As retas AC e BD se encontram em E e as retas AK e BL se encontram em F. Prove que os pontos E, I e F são colineares.

06. (Romênia) Seja ABC um triâgulo e w_a, w_b, w_c círculos dentro de ABC tangentes exteriormente dois a dois, tais que w_a é tangente a AB e AC, w_b é tangente a AB e BC e w_c é tangente a AC e BC. Sejam D o ponto de tangência entre w_b e w_c, E o ponto de tangência entre w_a e w_c e F o ponto de tangência entre w_a e w_b. Prove que as retas AD, BE e CF têm um ponto em comum.

07. (Irã) Sejam w e Ω o incírculo e o circuncírculo do triângulo ABC. w toca BC, CA e AB em D, E e F respectivamente. Os três círculos w_a, w_b e w_c tangenciam w em D, E e F, respectivamente, e Ω em K, L e M, respectivamente.

(a) Prove que DK, EL e FM têm um ponto P em comum.
(b) Prove que o ortocentro do triângulo DEF pertence à reta OP.

08. Seja Γ uma circunferência e *A*, *B* e *C* pontos em seu interior. Construa as seguintes três circunferências: Γ_1 tangente a Γ, AB e *AC*; Γ_2 tangente a Γ, AB e *BC*; Γ_3 tangente a Γ, AC e *BC*. Sendo C_1, C_2 e C_3 os respectivos pontos de tangência de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ com Γ, prove que AC_1, BC_2 e CC_3 passam por um mesmo ponto.



Você sabia...

Que $33661 \cdot 2^{7031232} + 1$ é primo? Esse foi o décimo primeiro primo descoberto pelo projeto "seventeen or bust" e foi encontrado por Sturle Sunde em 17 de outubro de 2007. Isso mostra que 33661 não é um número de Sierpinski (números de Sierpinski são naturais ímpares *k* tais que $k \cdot 2^n + 1$ é composto para todo $n \in \mathbf{N}$; veja a Eureka! 18, pág. 61 e a Eureka! 25 página 56), reduzindo para 6 o número de naturais menores que 78557 (que é o menor número de Sierpinski conhecido), sobre os quais não se sabe se são ou não números de Sierpinski: 10223, 21181, 22699, 24737, 55459 e 67607. Veja www.seventeenorbust.com para mais informações (inclusive sobre como participar do projeto).

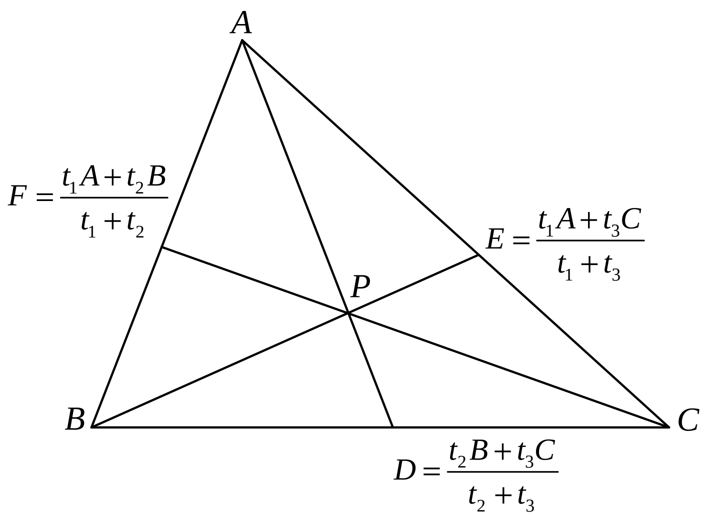
COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA PROPOSTO POR MARCEL MENEZES DE ANDRADE PRADO

Seja ABC um triângulo e P um ponto em seu interior tal que AP, BP e CP intersectam os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Se $\overline{AP} = a,\ \overline{BP} = b,\ \overline{CP} = c,\ \overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} = 3$ e $a + b + c = 43$, determine abc.

SOLUÇÃO:

Escrevemos P em coordenadas baricêntricas:



$P = t, A + t_2B + t_3C$, com $t_1, t_2, t_3 \in (0,1)$ tais que $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Devemos ter então $D = \dfrac{t_2B + t_3C}{t_2 + t_3}$ (note que $P = t_1A + (1 - t_1)\left(\dfrac{t_2B + t_3C}{1 - t_1}\right) = t_1A + (1 - t_1)D$), $E = \dfrac{t_1A + t_3C}{t_1 + t_3}$ e $F = \dfrac{t_1A + t_2C}{t_1 + t_2}$.

Temos

$$3 = \overline{PD} = |D - P| = \left|\left(\frac{1}{t_2 + t_3} - 1\right)(t_2B + t_3C) - t_1A\right| = t_1\left|\frac{t_2B + t_3C}{t_2 + t_3} - A\right| = t_1|D - A| =$$

$= t_1\overline{AD} = t_1\left(\overline{AP}+\overline{PD}\right) = t_1(a+3)$, donde $t_1 = \dfrac{3}{a+3}$. Analogamente, $t_2 = \dfrac{3}{b+3}$ e $t_3 = \dfrac{3}{c+3}$. Como $t_1+t_2+t_3=1$, temos $\dfrac{3}{a+3}+\dfrac{3}{b+3}+\dfrac{3}{c+3}=1$, donde $3\big((b+3)(c+3)+(a+3)(c+3)+(a+3)(b+3)\big)=(a+3)(b+3)(c+3)$, e logo $3(6a+6b+6c+27)=abc+9a+9b+9c+27$, e finalmente

$abc = 9(a+b+c)+54 = 9\cdot 43+54 = 441.$

PROBLEMA PROPOSTO POR WILSON CARLOS DA SILVA RAMOS

Determine todas as funções $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ que sejam deriváveis em $x = 1$ e que satisfaçam:

$F(xy)=\sqrt{x}F(y)+\sqrt{y}F(x), \forall x,y\in(0,+\infty).$

SOLUÇÃO:

Fazendo $y = x$, obtemos $F(x^2)=2\sqrt{x}F(x), \forall x+(0,+\infty).$

Com $x = 1$ temos $F(1)=2F(1)$, donde $F(1)=0.$ Vamos mostrar por indução que $F(x^{2^k})=2^k x^{\frac{2^k-1}{2}}F(x)$, para todo inteiro positivo k e todo $x\in(0,+\infty)$. Para $k = 1$ isso é a afirmação anterior e, supondo que isso vale para um certo k,

$F(x^{2^{k+1}})=F((x^{2^k})^2)=2\sqrt{x^{2^k}}F(x^{2^k})=2\cdot x^{2^k/2}\cdot 2^k\cdot x^{\frac{2^k-1}{2}}\cdot F(x)=2^{k+1}\cdot x^{\frac{2^{k+1}-1}{2}}\cdot F(x),$

como queríamos mostrar.

Fazendo $x=e^{h/2^k}$, obtemos $F(e^h)=2^k e^{h\cdot\frac{2^k-1}{2^{k+1}}}F(e^{h/2^k}), \forall k\ge 1.$

Como $\lim\limits_{k\to+\infty}2^k e^{\frac{2^k-1}{2^{k+1}}\cdot h}F(e^{h/2^k})=e^{h/2}\lim\limits_{k\to\infty}2^kF(e^{h/2^k})=e^{h/2}\lim\limits_{k\to\infty}2^k(e^{\frac{h}{2^k}}-1)\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{F(e^{h/2^k})-F(1)}{e^{h/2^k}-1}=$

$=he^{h/2}F'(1)$, temos $F(e^h)=che^{h/2}$, onde $c=F'(1)$, para todo $h > 0$.

Fazendo $x=e^h$, obtemos $F(x)=c(\log x)\cdot\sqrt{x}, \forall x\in(0,+\infty).$

Todas as funções desse tipo satisfazem a equação funcional.

De fato, $F(xy)=c(\log x+\log y)\sqrt{xy}=\sqrt{x}F(y)+\sqrt{y}F(x), \forall x,y\in(0,+\infty).$

Resolvemos a seguir, a pedido de Mauro Felix de Sousa, três problemas da seção “Olimpíadas ao redor do mundo”, propostos nas Eureka! No. 9 e 10.

47 (Irã – 1999)
Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfazem
$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y$ para todos os números reais x e y.

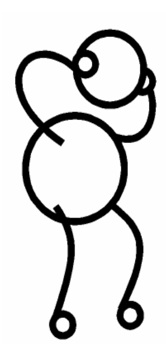
SOLUÇÃO:
Fazendo $x = y = 0$, obtemos $f(f(0))=f(0)$.
Fazendo $x=0, y=-f(0)$, obtemos $f(0)=f(f(0))-4f(0)^2$, donde $-4f(0)^2=0$, e logo $f(0)=0$. Fazendo agora $y = 0$, obtemos $f(f(x))=f(x^2), \forall x\in\mathbb{R}$. Se $f(a)=f(b)$ com $a\neq b$, teremos
$f(b^2-y)=f(f(b)+y)-4f(b)y=f(f(a)+y)-4f(a)y=f(a^2-y), \forall y\in\mathbb{R}$,
donde, se $t=b^2-a^2$, $f(z+t)=f(z), \forall z\in\mathbb{R}$.
Note agora que, se $t\neq 0$, fazendo $y=t$ obtemos $f(f(x))=f(f(x)+t)=$
$=f(x^2-t)+4f(x)t=f(x^2)+4f(x)t=f(f(x))+4f(x)t, \forall x\in\mathbb{R}$, donde $4f(x)t=0, \forall x\in\mathbb{R}$, e logo $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$, o que é uma solução (claramente). Por outro lado, fazendo $x = 0$ na equação funcional, obtemos $f(y)=f(-y), \forall y\in\mathbb{R}$. Assim, se f não é identicamente nula, $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$. Em particular, como $f(f(x))=f(x^2), \forall x\in\mathbb{R}$, para todo $x\in\mathbb{R}$ devemos ter $f(x)=x^2$ ou $f(x)=-x^2$. Se para algum $x\neq 0, f(x)=-x^2$, temos $f(x^2-y)=f(y-x^2)=f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y, \forall y\in\mathbb{R}$, donde $-4x^2y=4f(x)y=0, \forall y\in\mathbb{R}$, absurdo. Assim, devemos ter $f(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Isso é outra solução, pois, de fato, $(x^2+y)^2=(x^2-y)^2+4x^2y, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

71 (Belarus – 2000)
Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) que satisfazem a equação $(m-n)^2(n^2-m)=4m^2n$.

SOLUÇÃO:
Seja $d=mdc(m,n)$. Temos $m=da, n=db$, com $mdc(a,b)=1$, e a equação equivale a $(a-b)^2(db^2-a)=4a^2b$. Como $mdc(b,a-b)=1$, segue que $b\mid db^2-a$, donde $b\mid a$, e logo $b = 1$. Temos então $(a-1)^2(d-a)=4a^2$. Como $mdc(a,a-1)=1$ e $(a-1)^2\mid 4a^2$, segue que $(a-1)^2\mid 4$, donde $a – 1 = 1$ ou $a – 1 = 2$. No primeiro caso, temos $a = 2$, $d – a = 16$, donde $d = 18$, e no segundo $a = 3$, $d – a = 9$, donde $d = 12$.
Assim, as duas soluções são (m, n) = (36, 18) e (m, n) = (36, 12).

89 (Balcânica – 2000)
Determinar todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que possuem a propriedade: $f(x\,f(x)+f(y))=f(x)^2+y$, para todos os números reais x e y.

SOLUÇÃO:
Fazendo $x = 0$, obtemos $f(f(y))=f(0)^2+y, \forall y\in\mathbb{R}$, donde f é uma bijeção, e logo existe a tal que $f(a) = 0$. Fazendo $x = a$, obtemos $f(f(y))=y, \forall y\in\mathbb{R}$, e logo $f(0)=0$. Fazendo $y = 0$ obtemos então $f(xf(x))=f(x)^2, \forall x\in\mathbb{R}$, donde $xf(x)=f(f(x)^2)$, ou seja, $f(z^2)=zf(z), \forall z\in\mathbb{R}$ (basta fazer $x = f(z)$, donde $f(x)=z$). Aplicando f dos dois lados da equação obtemos $f(f(x)^2+y)=f(f(xf(x)+f(y)))=xf(x)+f(y)=f(f(x)^2)+f(y)$, donde, fazendo $f(x)^2=t\ge 0$, obtemos $f(y+t)=f(y)+f(t), \forall y\in\mathbb{R}, t\ge 0$ (lembramos que f é sobrejetiva, donde $t=f(x)^2$ pode assumir qualquer valor não–negativo). Assim, $2f(x)+f(1)=f(2x+1)=f((x+1)^2-x^2)=f((x+1)^2)-f(x^2)=$
$=(x+1)f(x+1)-xf(x)=xf(1)+f(x)+f(1), \forall x\in\mathbb{R}$, donde $f(x)=xf(1), \forall x\in\mathbb{R}$..
Como $f(1)^2=f(f(1))=1$, isso implica que as únicas soluções são $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ e $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$ (é fácil ver que essas funções satisfazem o enunciado).



Você sabia...

Que $2^{43112609}-1$ e $2^{37156667}-1$ são primos? Eles têm 12978189 e 11185272 dígitos respectivamente e são os dois maiores primos conhecidos no momento. Foram descobertos em 23 de agosto de 2008 e 6 de setembro de 2008 por Edson Smith e Hans – Michael Elvenich respectivamente, dois participantes do GIMPS. O GIMPS é um projeto cooperativo na internet que já encontrou 12 primos de Mersenne. Veja www.mersenne.org para mais informações, inclusive como ajudar a achar outros primos de Mersenne.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

Neste número apresentamos algumas soluções enviadas pelos leitores da nossa seção.

Bruno Holanda
Carlos Augusto David Ribeiro

Obs. Nas Eurekas 25 e 27 apareceram, por descuido na edição, problemas na seção Olimpíadas ao redor do mundo com numeração repetida. Nesses casos, procuraremos mencionar o exemplar em que o problema foi publicado, ao nos referirmos a um desses problemas.

224. (Balcânica Júnior – 2007) Eureka! No. 27 Seja a um real positivo tal que $a^3 = 6(a+1)$. Prove que a equação $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ não possui solução real.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DO NASCIMENTO PANTOJA JÚNIOR (FORTALEZA – CE)

$a^3 = 6a + 6 \Rightarrow a(a^2 - 6) = 6 \therefore a^2 = \frac{6}{a} + 6,$ e como $a > 0$ concluímos que $a^2 > 6,$ daí:

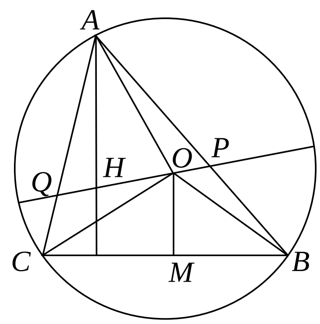
$a(a^2 - 6) = 6 < a^2 \Rightarrow a^2 - a - 6 < 0,$ ou seja, o valor de a é tal que:

$-2 = \frac{1 - \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} < a < \frac{1 + \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = 3,$ e como já sabíamos que $a > \sqrt{6} > -2,$ fica: $\sqrt{6} < a < 3.$

Substituindo na equação em x, $(a^2 - 6)$ por $(6/a)$, teríamos como raízes $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{6}{a}}}{2},$ mas estas raízes não são reais, pois $a^2 - \frac{24}{a} < 0,$ devido ao fato de $a^3 = 6(a+1) < 6(3+1) = 24.$

226. (Inglaterra – 2007) Eureka! No. 27 Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > AC$ e $\angle BAC = 60°.$ Seja O o circuncentro e H o ortocentro. A reta OH encontra AB em P e AC em Q. Prove que $PO = HQ$.

SOLUÇÃO DE EMERSON RAMOS BARROSO (FORTALEZA – CE)



Seja M o ponto médio de BC.
Sabemos inicialmente que

$$AH = 2OM \qquad (1)$$

e que

$$\angle QAH = \angle OAP \qquad (2)$$

Temos que
$\angle BOC = 2\angle BAC = 120° \Rightarrow \angle BOM = \angle MOC = 60° \Rightarrow OM = OB\cos 60° = AO\cos 60° \Rightarrow$
$2OM = AO,$ e por (1):

$$AO = AH \qquad (3)$$
$$\Rightarrow \angle AHO = \angle AOH$$

e como $\angle AHO$ e $\angle AOH$ são ângulos externos dos triângulos AQH e AOP, temos $\angle HQA + \angle QAH = \angle OPA + \angle PAO$ e por (2):

$$\angle AQH = \angle APO$$

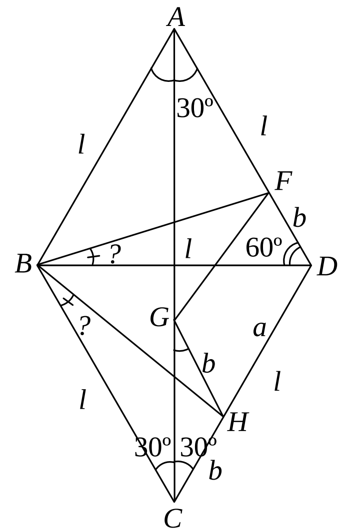
Logo o triâgulo AQP é isósceles, onde $AP = AQ.$ Também por (2) e (3), temos que os triângulos APO e AQH são congruentes (A.L.A.) e assim:

$$PO = HQ,$$

como queríamos demonstrar.

229. (Bielorússia – 2001) Eureka! No. 27 No losango $ABCD$, $\angle A = 60°$. Os pontos F, H e G estão sobre os segmentos $\overline{AD}, \overline{CD}$ e $\overline{AC}$ de modo que $DFGH$ é um paralelogramo. Prove que FBH é um triângulo equilátero.

SOLUÇÃO DE ANTONIO MARCOS S. ALMEIDA (MANAUS – AM)



Sendo $\overline{AD} // \overline{GH}$, pois $DFGH$ é paralelogramo, temos $C\hat{G}H \equiv H\hat{C}G$ e o triângulo HCG é isósceles, logo $HC = GH = b$. Mas $FD = b$, logo os triângulos BCH e BDF são congruentes, pois $BC = BD = l$ e $F\hat{D}B = 60°$, já que $ABCD$ é losango. Portanto $\overline{BH} \equiv \overline{BF}$ e $C\hat{B}H \equiv D\hat{B}F$.

Observe que $C\hat{B}D \equiv C\hat{B}H + H\hat{B}D \equiv H\hat{B}D + D\hat{B}F \equiv H\hat{B}F = 60°$. Desta forma conclui-se que o triângulo BFH é equilátero, pois é isósceles e tem o ângulo do vértice de $60°$.

230. (Rússia – 2007) Eureka! No. 27

Sejam a, b, c números reais. Prove que pelo menos uma das três equações

$$x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0,$$
$$x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$$
$$x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$$

possui solução real.

SOLUÇÃO DE JEAN PIERRE YOUYOUTE (RIO DE JANEIRO - RJ)

Analisaremos o caso em que as duas primeiras equações não tem solução real e provaremos que a terceira possui solução real. Os demais casos são análogos.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = (a-b)^2 - 4(b-c) < 0 \\ \Delta_2 = (b-c)^2 - 4(c-a) < 0\end{array}\right| \Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 < 4(b-a).$$

Como a, b, c são reais, então:

$$0<(a-b)^2+(b-c)^2<4(b-a)\Rightarrow 4(b-a)>0\Leftrightarrow 4(a-b)<0$$

$$\Delta_3=(c-a)^2-4(a-b)$$

$\Delta_3>0\Leftrightarrow (c-a)^2>4(a-b).$ Mas $(c-a)^2\geq 0>4(a-b)\Rightarrow (c-a)^2>4(a-b).$

Portanto, a terceira equação possui solução real.

235. (Olimpíada Checa e Eslovaca – 2007) Eureka! No. 27

Se x, y, z são números reais no intervalo (–1, 1) satisfazendo $xy+yz+zx=1$, mostre que

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\leq 1+(x+y+z)^2$$

SOLUÇÃO DE JEAN PIERRE YOUYOUTE (RIO DE JANEIRO - RJ)

$$1+(x+y+z)^2\geq 6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Leftrightarrow$$

$$1+x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\geq 6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Leftrightarrow$$

$$3+x^2+y^2+z^2\geq 6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Aplicando a desigualdade das médias obtemos:

$$(1+x)(1-y)+(1+y)(1-z)+(1+z)(1-x)\geq 3\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Leftrightarrow$$

$$1+\cancel{x}-\cancel{x}-xy+1+\cancel{y}-\cancel{z}-yz+1+\cancel{z}-\cancel{x}-zx\geq 3\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Leftrightarrow$$

$$3-(xy+yz+zx)\geq 3\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Leftrightarrow$$

$$3+1\geq 6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Mas $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq 1.$

Logo,

$$3+x^2+y^2+z^2\geq 3+1\geq 6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Rightarrow$$

$$3+x^2+y^2+z^2\geq 6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

113. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ formam uma seqüência de inteiros positivos menores que 2007 tais que $\dfrac{a_m + a_n}{a_{m+n}}$ é inteiro, para quaisquer inteiros positivos *m*, *n*.
Prove que a seqüência (a_n) é periódica a partir de um certo ponto.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Seja $c < 2007$ o maior inteiro positivo tal que a seqüência $(a_n)_{r\in\mathbb{N}}$ tem infinitos termos iguais a *c*.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \le c, \forall n > n_0$. Note que, se $N, n \in \mathbb{N}$ são tais que $n_0 < N - n < N$ e $a_N = a_n = c,$ então, como $c = a_N = a_{(N-n)+n}$ divide $a_{N-n} + a_n = a_{N-n} + c,$ segue que $c \mid a_{N-n}$ e, como $a_{N-n} \le c,$ devemos ter $a_{N-n} = c.$

Precisaremos agora do seguinte

Lema: Para quaisquer inteiros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_k,$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que qualquer múltiplo de $d = mdc(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ que seja maior que m_0 pode ser escrito como $r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_k b_k$ com $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}.$

Prova: Vamos usar indução em *k*. Para *k* = 1 o resultado é óbvio.

Suponhamos que exista $\widetilde{m}_0$ tal que, se $\tilde{d} = mdc(b_1, b_2, \ldots b_k),$ então todo múltiplo de $\tilde{d}$ maior que $\widetilde{m}_0$ se escreva como $r_1 \cdot b_1 + \ldots + r_k b_k,$ com $r_i \in \mathbb{N}, \forall i \le k.$ Sejam agora $d = mdc(b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}) = mdc(\tilde{d}, b_{k+1})$ e $m_0 = \widetilde{m}_0 + b_{k+1}\tilde{d}.$ Sabemos que *d* pode ser escrito como $\tilde{d}x + b_{k+1}y,$ com $x, y \in \mathbb{Z}.$ Se $t \cdot d = \tilde{d} \cdot (tx) + b_{k+1}(ty) > m_0,$ tomamos $q, s \in \mathbb{Z}$ com $ty = q \cdot \tilde{d} + s$ e $0 \le s < \tilde{d}.$

Temos então $t \cdot d = \tilde{d} \cdot (tx + q \cdot b_{k+1}) + b_{k+1}(ty - q \cdot \tilde{d}) = \tilde{d} \cdot (tx + q \cdot b_{k+1}) + b_{k+1} \cdot s.$
Temos $s \in \mathbb{N},$ e $\tilde{d} \cdot (tx + q \cdot b_{k+1}) = td - b_{k+1} \cdot s > m_0 - b_{k+1} \cdot s > m_0 - b_{k+1} \cdot \tilde{d} = \widetilde{m}_0,$ donde, pela hipótese de indução, existem $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ com $\tilde{d} \cdot (tx + q \cdot b_{k+1}) = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_k b_k,$ e, definindo $r_{k+1} = s \in \mathbb{N},$ teremos $t \cdot d = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_k b_k + r_{k+1} b_{k+1},$ o que termina a prova do Lema.

Sejam agora $X = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = c\},$ e *d* o máximo divisor comum dos elementos de *X*. Existem $b_1, b_2, \ldots, b_k \in X$ com $mdc(b_1, b_2, \ldots, b_k) = d,$ e existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo múltiplo de *d* maior que m_0 se escreve como $r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_k b_k$ com

$r_1, r_2, ..., r_k \in \mathbb{N},$ pelo Lema. Afirmamos que, se se $n > n_0$ é múltiplo de d então $a_n = c$. De fato, como vimos anteriormente, se $N > N - b_i > n_0$ e $a_N = c$ então $a_{N-b_i} = c,$ para todo $i \le k$.

Tomando $\widetilde{N} > n + m_0$ tal que $a_{\widetilde{N}} = c$, temos $\widetilde{N}$ múltiplo de d, donde $\widetilde{N} - n > m_0$ também é múltiplo de d, e logo se escreve como $r_1b_1 + r_2b_2 + ... + r_kb_k$, com $r_1, r_2, ..., r_k \in \mathbb{N}$. Aplicando a observação acima várias vezes, concluímos que $a_n = a_{N - r_1b_1 - r_2b_2, ..., r_kb_k}$ é igual a c, o que mostra nossa afirmação.

Seja agora $n > m_0$.

Seja t inteiro positivo tal que $n + t$ é múltiplo de d.

Temos então que $c = a_{n+t}$ divide $a_n + a_t$, e, analogamente, $c = a_{n+d+t}$ divide $a_{n+d} + a_t$, donde c divide $(a_{n+d} + a_t) - (a_n + a_t) = a_{n+d} - a_n$. Como a_n e a_{n+d} são inteiros positivos menores ou iguais a c, devemos ter $a_{n+d} = a_n$. Assim, $a_{n+d} = a_n$ para todo $n > n_0$, o que prova o resultado.

115. Suponha que ABC é um triângulo com lados inteiros a, b e c com $B\widehat{C}A = 60°$ e $mdc(a,b) = mdc(a,c) = mdc(b,c) = 1.$

Prove que $c \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$.

SOLUÇÃO DE EDEL PÉREZ CASTILLO (PINAR DEL RIO – CUBA)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60°) = a^2 + b^2 - ab$

Demonstremos que c é ímpar.

Como $mdc(a,b) = 1$ então a é ímpar ou b é ímpar. Suponhamos que b é ímpar.

Se a é par ou ímpar então c é ímpar.

Demonstremos que c não é divisível por 3.

Se $3 | c \Rightarrow 9 | c^2$ então $c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab$

$3 | (a+b)^2 \Rightarrow 3 | (a+b) \Rightarrow 9 | (a+b)^2 \Rightarrow 9 | 3ab \Rightarrow 3 | ab$

Então $3 | a$ ou $3 | b$, o que em qualquer caso contradiz que $mdc(a,b) = mdc(a,c) = mdc(b,c) = 1.$

Logo c não é divisível por 3.

Demonstremos que $c \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3).$

$c^2 = a^2 + b^2 - ab \Rightarrow 4c^2 = 4a^2 - 4ab + 4b^2 = (2a-b)^2 + 3b^2 \Rightarrow (2c - 2a + b)(2c + 2a - b) = 3b^2.$

Os números $(2c - 2a + b)$ e $(2c + 2a - b)$ são ímpares porque b é ímpar.

Seja d um divisor comum de $(2c-2a+b)$ e $(2c+2a-b)$. Então $d\mid 4c$ e $d\mid 2(a-b)$ porém como d é ímpar temos que $d\mid c$ e $d\mid(2a-b)$. Já demonstramos que $mcd(c,3)=1$ então $mcd(d,3)=1$.

Da equação $4c^2=(2a-b)^2+3b^2$ deduzimos que $d^2\mid 3b^2 \Rightarrow d^2\mid b^2 \Rightarrow d\mid b \Rightarrow d=1$ (porque $d\mid c$ e $mcd(b,c)=1$).

Como $mcd(2c-2a+b,2c+2a-b)=1$ e seu produto é $3b^2$ temos que:

$2c-2a+b=3x^2$

$2c+2a-b=y^2$

Ou também poderia ser:

$2c-2a+b=y^2$

$2c+2a-b=3x^2$

Os valores de x, y são ímpares porque b é ímpar.

Em qualquer caso temos que $c=(3x^2+y^2)/4$

$$c-y^2=\frac{3(x^2-y^2)}{4}\Rightarrow c-y^2\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow c\equiv y^2 \pmod 3$$

Logo $c\equiv 1 \pmod 3$, porque c não é divisível por 3.

Como $c\equiv 1 \pmod 3$ então $c\equiv 1 \pmod 6$ ou $c\equiv 4 \pmod 6$, porém c é ímpar, logo $c\equiv 1 \pmod 6$.

119. Mostre que não existem inteiros positivos a e b tais que $(36a+b)(36b+a)$ seja uma potência de 2.

SOLUÇÃO DE MARCILIO MIRANDA DE CARVALHO (TERESINA – PI)

Se $(36a+b)(36b+a)$ é uma potência de 2, então $(36a+b)$ e $(36b+a)$ são potências de 2 maiores que 36. Daí $(36a+b)$ e são $(36b+a)$ são pares, logo a e b são pares. Agora seja S o conjunto de pares (a, b) tais que $(36a+b)(36b+a)$ seja uma potência de 2. Se S não é vazio então S possui um par (a, b) tal que a é mínimo. Como a e b são pares então $a = 2c$ e $b = 2d$, logo $4(36c+d)(36d+c)$ é uma potência de 2, daí $(36c+d)(36d+c)$ é uma potência de 2, onde $c < a$, absurdo!

120. Sejam *a*, *b*, *c* números reais e soma S_n definida como $S_n = a^n + b^n + c^n$, para qualquer *n* inteiro não negativo. Sabe-se que $S_1 = 2$, $S_2 = 6$ e $S_3 = 14$. Mostre que $\left|S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}\right| = 8$ para todo inteiro *n* > 1.

SOLUÇÃO DE MARIA CLARA MENDES SILVA (PIRAJUBA – MG)

Vamos definir como:

$\Omega_1 = a + b + c$

$\Omega_2 = ab + ac + bc$

$\Omega_3 = abc$

Veja que:

$$a^n + b^n + c^n = (a+b+c)\left(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}\right) - (ab+bc+ac)\left(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}\right)$$

$$+abc\left(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}\right).$$

Isso pode ser verificado diretamente abrindo os produtos.

Substituindo com a nossa notação:

$$S_n = \Omega_1 S_{n-1} - \Omega_2 S_{n-2} + \Omega_3 S_{n-3}.$$

Assim podemos definir S_n por recorrência.

Falta descobrir Ω_1, Ω_2 e Ω_3.

Inicialmente note que $S_1 = a + b + c = 2$.

Assim $\Omega_1 = 2$.

Elevando *a* + *b* + *c* ao quadrado:

$$4 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) = S_2 + 2\Omega_2 = 6 + 2\Omega_2.$$

Resolvendo achamos $\Omega_2 = -1$.

Finalmente:

$$14 = a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right) + 3abc =$$

$$= 2 \cdot (6+1) + 3\Omega_3 = 14 + 3\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = 0.$$

Na equação de recorrência que tínhamos obtido anteriormente:

$$S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Agora usaremos indução em *n*:

Para *n* = 2, o que queremos demonstrar é claramente verdadeiro, uma vez que

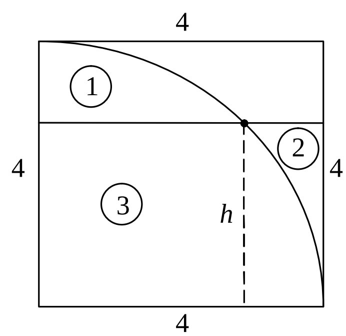
$$S_2^{\,2} - S_1 S_3 = 6^2 - 28 = 8.$$

Suponhamos que essa propriedade seja verdadeira para todo natural menor que um certo *n*, queremos provar que também vale para *n*.

$$S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1} = S_n^2 - S_{n-1} \cdot \left(2S_n + S_{n-1}\right) = S_n^2 - 2S_{n-1}S_n - S_{n-1}^2 =$$

$= -S_{n-1}^2 - S_n\left(2S_{n-1} - S_n\right).$
Como $2S_{n-1} + S_{n-2} = S_n,$
$2S_{n-1} - S_n = -S_{n-2}.$
Substituindo:
$S_n^2 - S_{n-1}\cdot S_{n+1} = -S_{n-1}^2 + S_n\cdot S_{n-2}.$
Essa expressão tem o mesmo módulo do que a obtida se trocarmos todos seus sinais, ou seja $S_{n-1}^2 - S_{n-2}\cdot S_n.$ Mas pela hipótese de indução o módulo desta é 8. Assim, o módulo de $S_n^2 - S_{n-1}S_{n+1}$ é 8. Por indução provamos que essa sentença é válida para todo *n* inteiro positivo.

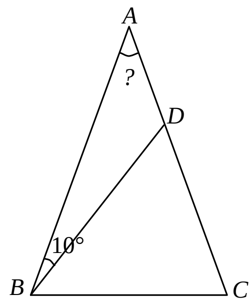
121. Na figura abaixo o lado do quadrado vale 4, obter o valor da altura *h* para que a área da região 1 seja igual a área da região 2.



SOLUÇÃO DE BRUNO SALGUEIRO FANEGO (VIVEIRO – ESPANHA)
A união das regiões 1 e 3 é um quadrante de um semicírculo de raio 4 (de área $\frac{p\cdot 4^2}{4}$) e a união das regiões 2 e 3, um retângulo de lados 4 e *h* (de área 4 · *h*), donde, sendo A_i a área da região *i*, $1 \le i \le 3$, teremos $A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1 + A_3 = A_2 + A_3 \Leftrightarrow \frac{p\cdot 4^2}{4} = 4\cdot h \Leftrightarrow h = p$.

122. Dado um triângulo *ABC* tal que $\overline{AB} = \overline{AC} = a + b$ e $\overline{BC} = a$, traça-se uma ceviana partindo de *B* determinando em $\overline{AC}$ um ponto *D* tal que $\overline{DA} = a$ e $\overline{DC} = b$. Sabendo que $A\hat{B}D = 10°$, determine os ângulos internos desse triângulo.

SOLUÇÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR (NILÓPOLIS – RJ)



$$\begin{cases} AD = BC = a \\ AB = AC \end{cases}$$

Tomando $\angle BAC = q$ e, usando que $AD = BC$ e a lei dos senos nos triângulos ABD e BDC, encontramos: $sen 10° = 2sen\left(\frac{q}{2}\right)\cdot sen(q + 10°)$.

Observe que $q = 20°$ é solução. Vamos mostrar que ela é única para o triângulo em questão.

Não é difícil de verificar que $q < 80°,$ pois não poderíamos ter $AD = BC$ para $q \geq 80°$ (BC será o maior lado); conseqüentemente, $q + 10 < 90°$, e $sen\left(\frac{q}{2}\right)$ e $sen(q + 10°)$ serão crescentes no primeiro quadrante.

I) Suponha que $q > 20° \Rightarrow sen 10° = 2sen\left(\frac{q}{2}\right)\cdot sen(q + 10°) > 2sen 10°\cdot sen 30° = sen 10°$ (absurdo).

II) Suponha que $q < 20° \Rightarrow sen 10° = 2sen\left(\frac{q}{2}\right)\cdot sen(q + 10°) < 2sen 10°\cdot sen 30° = sen 10°$ (absurdo).

Conclusão: $q = 20°$ é a única solução.

127. Determine todos os inteiros positivos k tais que existem inteiros positivos x, y, z com $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = k$.

SOLUÇÃO DE EDEL PÉREZ CASTILLO (PINAR DEL RIO – CUBA)

Se $x = y = z = 1$ obtemos $k = 3$; se $x = y = z = 3$ obtemos $k = 1$. Falta provar que estes são os únicos valores que pode tomar k.

Provemos que k deve ser ímpar.

Seja $S = \{(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3 : \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = k$ onde k é par$\}$

Provemos que este conjunto é vazio.

Se não é vazio existem $x_0, y_0, z_0 \in S$ tais que $x_0 + y_0 + z_0$ é mínimo.

Temos $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = kx_0y_0z_0$. Como o membro direito é par , há dois casos:

(1) Um dos números é par e os outros dois números são ímpares.

(2) Os três são pares.

No caso (1), se x_0 é par, y_0, z_0 ímpares, então $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv 2 \pmod 4$ e no outro membro temos que $kx_0y_0z_0 \equiv 0 \pmod 4$ porque k e x_0 são pares. Contradição.

No caso (2) $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$ facilmente comprovamos que:

$\dfrac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{x_1y_1z_1} = 2k$, logo $(x_1, y_1, z_1) \in S$.

$x_1 + y_1 + z_1 = (x_0 + y_0 + z_0)/2 < x_0 + y_0 + z_0$.

Isto é absurdo porque $x_0 + y_0 + z_0$ é mínimo.

Logo o conjunto S é vazio.

Provemos que $k \le 3$, o que resolve o problema.

Seja $C = \{(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3 : \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = k \ge 4\}$

Provemos que este conjunto em C é vazio.

Se não é vazio existem x_0, y_0, z_0 tais que $x_0 + y_0 + z_0$ é mínimo.

Podemos supor que $x_0 \le y_0 \le z_0$.

Então:

$$\frac{x_0}{y_0z_0} + \frac{y_0}{x_0z_0} + \frac{z_0}{x_0y_0} \ge 4$$

Mas $\dfrac{x_0}{y_0z_0} \le 1$ e $\dfrac{y_0}{x_0z_0} \le 1$, donde temos que $1 + 1 + \dfrac{z_0}{x_0y_0} \ge 4$, o que implica que $z_0 \ge 2x_0y_0$.

Consideremos a equação $t^2 - kx_0y_0t + x_0^2 + y_0^2 = 0$ que tem a z_0 como uma das suas soluções. Seja z_1 a outra solução da equação; então temos:

(1) $z_0 + z_1 = kx_0y_0$

(2) $z_0z_1 = x_0^2 + y_0^2$

De (1) deduzimos que z_1 é inteiro, de (2) deduzimos que z_1 é positivo. Logo $(x_0, y_0, z_1) \in C$ mas $x_0 + y_0 + z_0 \le x_0 + y_0 + z_1$ porque $x_0 + y_0 + z_0$ é mínimo.

Então $2x_0y_0 \le z_0 \le z_1$, e substituindo em (2) obtemos $4z_0^2y_0^2 \le x_0^2 + y_0^2 \le 2y_0^2$ donde se obtém que $4x_0^2 \le 2$, o que é absurdo. Portanto o conjunto C é vazio.

128. Barango Joe era um sapo de mútiplos talentos que habitava a Terra das Chances Diminutas, localizada no alto de uma montanha.
Após sua maioridade, Barango Joe decidiu tentar a vida no Reino das Grandes Oportunidades, localizado no cume da montanha vizinha.
Para isso, ele atravessaria a extensa ponte de madeira por cima do Desfiladeiro da Morte. Entretanto, a ponte era guardada pela Esfinge Vegas, exímia jogadora que sempre desafiava os viajantes para algum jogo. O viajante vitorioso tinha a passagem franqueada; e o perdedor era lançado ao abismo.
Assim chegando à cabeceira da ponte, Barango Joe foi desafiado a uma partida de "Pachang" jogo que lembra o "Black Jack" ou "Vinte e um", mas é jogado por 2 oponentes da seguinte maneira:
Os jogadores, designados por "banca" e "apostador", utilizam um dado gerador de números aleatórios reais uniformemente distribuídos no intervalo [0,1].
Inicialmente, a banca sorteia um número X. Se não estiver satisfeita com o número obtido, pode descartá-lo e então sortear um novo número. Este procedimento pode ser executado 2 vezes, Isto é, pode haver até 3 sorteios na definição do número X da banca.
Então, o apostador sorteia quantos números forem necessários até que a soma de seus números ultrapasse o número X da banca. Neste momento, se esta soma for inferior a 1, o apostador ganha; caso contrário, perde.
Ou seja, para ganhar, o apostador precisa "chegar mais próximo" de 1 que a banca, sem no entanto "estourar o limite" de 1.
Após explicar as regras do Pachang, a Esfinge Vegas deu uma opção ao sapo:
- Você prefere ser a banca ou o apostador?
O que o Barango Joe deveria responder?
Obs. Utilize lápis, papel, e uma calculadora científica simples.

SOLUÇÃO DE RAFAEL TUPYNAMBÁ DUTRA (BELO HORIZONTE – MG)

Primeiramente, supondo que X já tenha sido escolhido, vamos determinar a função $f(X)$ que dá a probabilidade de o apostador ganhar. Seja $p_n(x)$ a função densidade de probabilidade para a soma dos números do apostador (ou seja, após n números sorteados pelo apostador, a probabilidade de a soma dos $n-1$ ser menor ou igual a X e a soma desses números estar entre a e b é dada por $\int_a^b p_n(x)dx$). Definimos $q_n(x)$ igual a $p_n(x)$ para $x \in [0, X]$ e $q_n(x)$ igual a 0 caso contrário. Seja também $g_n = \int_X^1 p_n(x)dx$ a probabilidade de o apostador ganhar após n números sorteados. Temos $p_1(x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

Lema: $q_n(x) = p_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ para $x \in [0, X]$ e $p_n(x) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ para $x \in (X, 1]$.

Prova por indução: o caso inicial $n = 1$ é trivial. Hipótese de indução: $q_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ para $x \in [0, X]$. Caso o jogo continue, a densidade de probabilidade da soma dos n primeiros números é dada por $q_n(x)$ (afinal, para o jogo continuar, essa soma deve estar no intervalo $[0, X]$). E a densidade de probabilidade do $(n+1)$-ésimo número é igual a $p_1(x) = 1 \forall x \in [0,1]$. Assim, somando, obtemos $p_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} q_n(t)dt$. Dessa forma, para $x \in [0, X]$, temos $p_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} q_n(t)dt = \int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \dfrac{x^n}{n!}$. E para $x \in (X, 1]$, $p_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} q_n(t)dt = \int_0^X \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \dfrac{X^n}{n!}$, c.q.d.

Pelo lema, temos $g_n = \int_X^1 p_n(x)dx = (1 - X)\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ e a probabilidade de o apostador ganhar é $f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n = (1 - X)\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!} = (1 - X)e^X$.

Agora imagine que a banca tenha k sorteios disponíveis para determinar X.

Seja P_k a probabilidade de o apostador ganhar nesse caso. Queremos calcular P_3.

Vamos calcular P_k recursivamente.

Primeira situação: imagine que a banca tem apenas 1 sorteio disponível para determinar X. Sabendo que, dado X, a probabilidade de o apostador ganhar é $f(X) = (1 - X)e^X$, descobrimos que $P_1 = \int_0^1 f(X)dX = e - 2 \cong 0{,}71828$.

Segunda situação: imagine agora que a banca tem até 2 sorteios para determinar X. Se, no primeiro sorteio, ela obteve um número x, ela pode ficar com esse número ou descartá-lo. A probabilidade de o apostador ganhar será $f(x)=(1-x)e^x$ no 1º caso e será $P_1 \cong 0{,}71828$ no 2º caso. Assim, a banca deve descartar x somente se $(1-x)e^x > P_1$. Seja a a raiz positiva da equação transcendente $(1-a)e^a = P_1$. Temos $a \cong 0{,}60954$. Dessa forma, a banca deve descartar o número x se $x<a$ e mantê-lo se $x>a$. Se a banca usar essa estratégia, a probabilidade de o apostador vencer será $P_2 = P_1 a + \int_a^1 f(X)dX = P_1 a + e - (2-a)e^a \cong 0{,}59823$.

Terceira situação: agora considere o problema original (a banca tem até 3 sorteios para determinar X). Se, no primeiro sorteio, ela obteve o número x, ela pode mantê-lo ou descartá-lo. A probabilidade de o apostador ganhar será $f(x)=(1-x)e^x$ no 1º caso e será $P_2 \cong 0{,}59823$ no 2º caso. Assim, a banca deve descartar x somente se $(1-x)e^x > P_2$. Seja b a raiz positiva da equação transcendente $(1-b)e^b = P_2$. Temos $b \cong 0{,}70416$. Dessa forma, a banca deve descartar o número x se $x<b$ e mantê-lo se $x>b$. Se a banca usar essa estratégia, a probabilidade de o apostador vencer será $P_3 = P_2 b + \int_b^1 f(X)dX = P_2 b + e - (2-b)e^b \cong 0{,}51915 > \frac{1}{2}$. Assim, o apostador tem probabilidade maior que $\frac{1}{2}$ de ganhar, mesmo quando a banca usa a melhor estratégia possível. Barango Joe deve responder que prefere ser o apostador.

Agradecemos o envio de soluções e a colaboração de:

Alexandre Salim Saud de Oliveira	**Niterói – RJ**
Alixanzito R. S. Costa	**Fortaleza – CE**
André Felipe M. da Silva	**Rio de Janeiro – RJ**
Doraci Gabriel da Rosa	**Fartura – SP**
Evandro Makiyama de Melo	**São Paulo – SP**
Flávio Antonio Alves	**Amparo – SP**
Glauber Moreno Barbosa	**Rio de Janeiro – RJ**
Kellem Corrêa Santos	**Rio de Janeiro – RJ**
Larissa Brito Sousa	**Fortaleza – CE**
Marcel Menzes de Andrade Prado	**Brasília – DF**
Oswaldo Mello Sponquiado	**São Paulo – SP**
Renato Carneiro de Souza	**Belo Horizonte – MG**
Samuel Liló Abdalla	**Sorocaba – SP**
Wallace Alves Martins	**Rio de Janeiro – RJ**

Continuamos aguardando soluções para os problemas 123, 124, 125, 126 e 129.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.

130) Suponha que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a equação $x^2 - (a+b+c)x + (ab+ac+bc) = 0$ não tem raízes reais. Prove que a, b e c têm todos o mesmo sinal e existe um triângulo de lados $\sqrt{|a|}$, $\sqrt{|b|}$ e $\sqrt{|c|}$.

131) a) Considere o seguinte jogo: no início um jogador A entrega um número $k \geq 2$ ao jogador B. Quando A entrega um número $m \geq 2$ a B, B pode devolver $m - 1$ ou $m + 1$ a A. Quando A recebe um número $n \geq 2$ deve, se n for ímpar devolver $3n$ a B; se n for par mas não múltiplo de 4, pode devolver $\frac{n}{2}$ ou $3n$ a B, e, se n for múltiplo de 4, pode devolver $\frac{n}{4}, \frac{n}{2}$ ou $3n$ a B. Qualquer jogador ganha o jogo se devolver 1 ao adversário. Caso algum jogador devolva ao adversário um número maior que $1000k$, o jogo empata. Determine, para cada valor de $k \geq 2$, se algum dos jogadores tem estratégia vencedora, e, nesses casos, qual deles.

b) Resolva o item anterior supondo que A, ao receber um número $n \geq 2$, deve devolver $3n$ a B se n for ímpar, deve devolver $\frac{n}{2}$ a B se n for par mas não múltiplo de 4 e deve devolver $\frac{n}{4}$ a B se n for múltiplo de 4.

132) a) Considere uma família $\Im$ de 2000 círculos de raio 1 no plano tal que dois círculos de $\Im$ nunca são tangentes e cada círculo de $\Im$ intersecta pelo menos dois outros círculos de $\Im$. Determine o número mínimo possível de pontos do plano que pertencem a pelo menos dois círculos de $\Im$.

Problema 130 proposto por Wílson Carlos da Silva Ramos (Belém – PA), problema 131 proposto por Benedito Tadeu Vasconcelos Freire (Natal – RN), problema 132 proposto por Juan Manuel Conde Calero (Alicante – Espanha).

AGENDA OLÍMPICA

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 06 de junho de 2009
Segunda Fase – Sábado, 12 de setembro de 2009
Terceira Fase – Sábado, 17 de outubro de 2009 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 18 de outubro de 2009 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 12 de setembro de 2009
Segunda Fase – Sábado, 17 e Domingo, 18 de outubro de 2008
¨

XV OLIMPÍADA DE MAIO
09 de maio de 2009
¨

XX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
14 a 20 de abril de 2009
Mar del Plata – Argentina
¨

L OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
10 a 22 de julho de 2009
Bremen – Alemanha
¨

XVI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
25 a 30 de julho de 2009
Budapeste, Hungria
¨

XXIV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
Setembro de 2009
Mérida – México
¨

XII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Alexandre Ribeiro Martins	(Univ. Tec. Fed. de Paraná)	Pato Branco – PR
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(EDETEC)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Eduardo Tengan	(USP)	São Carlos – SP
Élio Mega	(Faculdade Etapa)	São Paulo – SP
Eudes Antonio da Costa	(Univ. Federal do Tocantins)	Arraias – TO
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
Jacqueline Rojas Arancibia	(UFPB))	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Jose de Arimatéia Fernandes	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Osvaldo Germano do Rocio	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO