37^a Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário — Primeira Fase

Problema 1 Sejam m e n inteiros positivos, X um conjunto com n elementos e seja $0 \leq k \leq n$ um inteiro. São escolhidos aleatória e independentemente subconjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_m$ de X. Portanto, dado um subconjunto $Y \subset X$ qualquer, a probabilidade de termos, por exemplo, $X_1 = Y$ é igual a $1/2^n$. Calcule a probabilidade de $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m$ possuir exatamente k elementos.

Problema 2 Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}}},$$

com dez raízes quadradas. Calcule $f'(0)$.

Problema 3 Randonaldo escolhe ao acaso dois números reais b e c do intervalo $[0, \alpha]$ (ou seja, tanto b como c têm distribuição uniforme no intervalo $[0, \alpha]$), e resolve a equação $x^2 + bx + c = 0$. A probabilidade de a equação ter soluções reais é $1/2$. Qual é o valor de α?

Problema 4 Seja n um inteiro positivo dado. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(x+n) = f(x) \text{ e } f(x)\overline{f(x+s)f(x+t)}f(x+s+t) = 1$$

para quaisquer $x, s, t \in \mathbb{Z}$.
Obs.: Se $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ é um número complexo, $\overline{z}$ denota seu conjugado, dado por $\overline{z} = a - bi$.

Problema 5 Um número natural é *bit-par* se, ao escrevermos esse número em base 2, temos um número par de dígitos (bits) iguais a 1. Isto é, se

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$$

com $b_i \in \{0, 1\}$, então n é bit-par se $\sum_{i=0}^{k} b_i$ é par. Um número natural é *bit-ímpar* se ele não for bit-par. Defina

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é bit-par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é bit-ímpar.} \end{cases}$$

Considere a sequência de 0s e 1s

$$s = s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \ldots = 011010\ldots$$

Determine todas as sequências formadas por 5 elementos do conjunto $\{0, 1\}$ (bits) que são da forma $s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} s_{n+4}$ para algum $n \geq 0$.

Problema 6 Sejam C_1 e C_2 círculos situados em um mesmo plano. Seja, ainda, P um ponto desse plano, exterior às regiões limitadas delimitadas por C_1 e C_2. Mostre como construir os pontos Q do plano, a partir dos quais é possível traçar tangentes $\overline{QA_1}$ e $\overline{QB_1}$ a C_1 (com A_1, B_1 pontos distintos de C_1), e $\overline{QA_2}$ e $\overline{QB_2}$ a C_2 (com A_2, B_2 pontos distintos de C_2), tais que a interseção da retas $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ é $\{P\}$.