Fibonacci e outras sequências recorrentes

Samuel Barbosa

Fibonacci

Problema 1. *Eu escolho um número de 1 a 144, inclusive. Você pode escolher qualquer subconjunto de 1,2,...144 e perguntar se meu número está no subconjunto. Uma reposta "sim" vai lhe custar 2 dólares e uma resposta "não" vai lhe custar 1 dólar. Qual é a mínima quantidade de dinheiro que você precisa ter para ter certeza que vai encontrar meu número?*

Problema 2. *A sequência de Fibonacci é definida por:* $F_1 = F_2 = 1$ *e* $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ *se* $n \geq 2$. *Prove que:*

a) $3|F_n \Leftrightarrow 4|n$.

b) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$

c) Dado um inteiro positivo m *existe um natural* n *tal que* $m|F_n$

d) Se $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *então* $\alpha^n = F_n\alpha + F_{n-1}$

e) Mostre que $F_n = n^2 \Leftrightarrow n = 1$ *ou* $n = 12$.

f) $F_n < 2^n$

Problema 3. *(Teorema de Zenckerdoff) Qualquer número natural pode ser representado como soma de números de Fibonacci com índices não consecutivos e maiores que 1.*

Problema 4. *Considere a sequência de Fibonacci definida por* $F_0 = 0, F_1 = 1$ *e* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. *Prove que*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+1}.$$

Problema 5. *(Bulgária) Encontre o número de subconjuntos não-vazios de* $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ *tais que não existem dois números consecutivos em um mesmo conjunto.*

Conjugados

Suponha que α seja um irracional e que estejamos interessados em calcular o resto de $\lfloor \alpha^n \rfloor \mod m$. Se encontrarmos um β tal que $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta \in \mathbb{Z}$ nosso trabalho será facilitado. Considere a equação: $x^2 - ax - b = 0$ onde $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha\beta$. Como α e β são raízes:

$$\alpha^2 = a\alpha + b \Rightarrow \alpha^{n+1} = a\alpha^n + b\alpha^{n-1}$$
$$\beta^2 = a\beta + b \Rightarrow \beta^{n+1} = a\beta^n + b\beta^{n-1}$$

Seja $K_n = \alpha^n + \beta^n$. Assim $K_{n+1} = aK_n + bK_{n-1}$. Como a e b são inteiros e $K_1 = \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $K_2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow K_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}$. $K_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{\alpha^n\} + \lfloor\alpha^n\rfloor + \{\beta^n\} + \lfloor\beta^n\rfloor \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} \in \mathbb{Z}$. Mas $0 < \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} < 2 \Rightarrow \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} = 1$. Como $0 < \beta < 1 \Rightarrow \lfloor\beta^n\rfloor = 0 \Rightarrow K_n = \lfloor\alpha^n\rfloor + 1$. Agora é bem mais fácil calcular $K_n \mod m$ pois sabemos que ele satisfaz uma recursão com os primeiros termos e a lei de formação conhecidos. Podemos modificar um pouco a idéia anterior para o caso $-1 < \beta < 0$.

Problema 6. *Prove que, para todo natural* n *temos:*

$$3 \mid \left\lfloor \left(\frac{7+\sqrt{37}}{2}\right)^n \right\rfloor.$$

Problema 7. *(Teste de Seleção do Brasil para a Cone Sul) Prove que para todo inteiro positivo* k, *a parte interia do número* $(7 + 4\sqrt{3})^k$ *é ímpar.*

Problema 8. *(Olimpíada Iraniana) Mostre que,* $k^n - \lfloor k^n \rfloor = 1 - \dfrac{1}{k^n}$ *onde* $k = 2 + \sqrt{3}$.

Problema 9. *Encontre a maior potência de 2 que divide*

$$\lfloor(3+\sqrt{11})^{2n+1}\rfloor.$$

Problema 10. *(Hungria 2000) Se* $A = (1000 + \sqrt{1000^2+1})^{1000}$, *determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de sua representação decimal.*

Problema 11. *Prove que para todo inteiro* $m > 2$ *existe um irracional* r, *que depende de* m, *tal que* $\lfloor r^k \rfloor \equiv -1 (\mod m)$.

Problema 12. *Considere a sequência de reais positivos* $a_1, a_2, ...,$ *satisfazendo* $a_1 = 1$ $a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$, *para todo inteiro* $n > 0$. *Prove que o dígito das unidades de* $\dfrac{1}{a_i}$ *não pode ser 0,3,5 ou 8 para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Problema 13. *(Seletiva do Brasil para a IMO-2001) Encontre todos os naturais* n *tais que* $\alpha^n - n^2\alpha$ *é um inteiro onde* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problema 14. *(Revista Eureka) Seja* α *a maior raiz da equação* $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. *Prove que* $\lfloor\alpha^{2004}\rfloor$ *é divisível por 17.*

Problema 15. *Seja* $(a_n)_{n>1}$ *uma sequência tal que* $a_1 = 43$, $a_2 = 42$ *e* $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$, *para todo* $n \geq 2$. *Mostre que, para todo* $m \in \mathbb{N}$, *existem infinitos números naturais* n *tais que* $a_n - 1$ *e* $a_{n+1} - 1$ *são ambos divisíveis por* m.