Funções Contínuas

Prof. Rodrigo Villard
rodrigovillard@gmail.com

Teorema da Aproximação de Stone – Weierstrass (versão real)

"Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua. Dado $\varepsilon>0$, existe um polinômio P tal que, para todo x em $[a,b]$, tem-se $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$."

Eu tenho uma história engraçada com esse teorema.

Quando estava indo para a Romênia em 2003 participar da IMC junto com toda a equipe brasileira (e foi o 1º ano em que o Brasil participou), estávamos bastante animados no voo de ida e não conseguíamos dormir. Daí, claro, veio a ideia de estudar, já que estávamos a caminho de uma competição até então meio desconhecida para todos nós. Em um determinado momento, eu estava lendo o livro Berkeley Problems in Mathematics e vi o seguinte problema:

Problema 1: Seja $f:[0,1]\to R$ uma função contínua. Prove que:

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\int_0^1 x^n\cdot f(x)\mathrm{d}x=f(1).$$

Como estava às vésperas da prova, achava que já não era mais hora de tentar resolver e fui direto à solução. Foi aí que, logo no início, vi que a solução do livro usava o Teorema de Stone-Weiestrass. Eu já o havia estudado num curso de Análise, mas nunca tinha visto uma aplicação a um problema 'olímpico'. Li a solução e fiquei muito feliz de ter aprendido a usar o poderoso teorema. Em seguida, mostrei a quem estava do meu lado, umas 3 ou 4 pessoas que também acharam bem legal o teorema ser útil para olimpíadas. Até aí tudo bem, porque situações como essa já tinham acontecido outras vezes.

Grande foi minha surpresa ao pegar o 1º dia da prova da IMC e ler o enunciado da questão 5:

Problema 2: (IMC 2003)
Sejam $g:[0,1]\to R$ uma função contínua e $f_n:(0,1]\to R$ a sequência de funções definida por

$$f_0(x)=g(x) \text{ e } f_{n+1}(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in(0,1]$$

e $n\geq 0$. Determine $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x\in(0,1]$.

A semelhança desse problema com o do avião era clara e, por isso, era óbvio que eu ia tentar seguir a mesma linha de raciocínio.

Quando saí da prova, fiquei mais feliz ainda por ver que outros brasileiros tinham usado o teorema (menos o Humberto, claro, que usou alguma mega ideia na hora).

Outra coisa legal foi que a solução oficial para esse problema era horrorosa e gigante.

Vejam como é importante estudar até o último minuto. Façam isso também e contem suas histórias em futuras semanas olímpicas :).

Abaixo, deixo mais problemas que usam o mesmo teorema:

Problema 3: (Putnam 1958) Seja $f:[a,b]\to\Re$ contínua tal que $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0$ para todo n inteiro não-negativo. Mostre que f é identicamente nula em $[a, b]$.

Problema 4: Existe f contínua tal que $\int_0^1 x\cdot f(x)\mathrm{d}x=1$ e $\int_0^1 x^n\cdot f(x)\mathrm{d}x=0$ para n = 0, 2, 3, 4, ...?

Problema 5: Seja $f:[0,1]\to R$ uma função contínua. Mostre que dado $\varepsilon>0$, existem um natural n e um polinômio $g(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k x^{4k}$, tais que $c_0,c_1,\ldots,c_n$ são *racionais* e $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

Problema 6: Seja $f:[0,1]\to R$ uma função contínua. Considere $h(z)=\int_0^1 f(t)\cdot\cos zt\cdot\mathrm{d}t$.

a) Prove que h é analítica em todo o plano;
b) Prove que $h\equiv 0 \Leftrightarrow f\equiv 0$.

Extra: Problemas de Equações Funcionais

Problema 7: Determine todas as funções reais contínuas tais que $f(2x)-f(x)\equiv x$.

Problema 8: Seja f uma função real contínua tal que $f(x)\equiv f(x^2)$. Prove que f é constante.

Problema 9: Determine todas as funções $f:R-\{1\}\to R$, contínuas em 0, tais que $f(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right)$, para todo $x\neq 1$.

Problema 10: Determine todas as funções reais contínuas tais que $3f(2x+1)\equiv f(x)+5x$.

Problema 11: (Putnam 1996) Seja c uma constante não-negativa. Dê uma completa descrição, com prova, do conjunto de todas as funções contínuas $f:R\to R$ tais que $f(x)=f(x^2+c)$ para todo x real.