

XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Cada questão vale **5 pontos** se, e somente se, para cada uma o resultado escrito pelo aluno coincidir com o gabarito abaixo. Cada questão vale 0 ou 5, isto é, não tem notas parciais. A nota máxima para esta parte é 30.

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	5	92	17	6	125	60

01. $\frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{2^4}{2^3} + \dots + \frac{2^{2005}}{2^{2004}} + \frac{2^{2006}}{2^{2005}} = \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 2}_{2005 \text{ parcelas iguais}} = 2005 \cdot 2 = 4010$. A soma dos algarismos desse número é $4 + 0 + 1 + 0 = 5$.

02. Como 20% da massa total dessa pessoa correspondem à massa de gordura, ela tem $20\% \cdot 100 = 20$ kg de gordura. Ela perdeu 40% da sua gordura, ou seja, perdeu $40\% \cdot 20 = 8$ kg de gordura, e como manteve os demais índices, ela pesava ao final do regime $100 - 8 = 92$ kg.

03. A soma dos algarismos dos números de dois algarismos varia de 1 a 18. Dessas somas, as que são quadrados perfeitos são 1, 4, 9 e 16. Temos então

- Soma 1: número 10
- Soma 4: números 13, 22, 31 e 40
- Soma 9: números 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 e 90
- Soma 16: números 79, 88 e 97

Portanto, nas condições propostas, há 17 números.

04. A quantidade inicial de algarismos é $9 + 2 \times 90 = 189$, dos quais 94 aparecem nas posições pares e 95 nas posições ímpares. Apagados os algarismos que aparecem nas posições pares, sobram 95 algarismos; desses, 47 estão nas posições pares e 48 nas posições ímpares. Repetindo a operação, restam 48 algarismos, sendo 24 algarismos em posições pares e 24 em posições ímpares. Na terceira aplicação da operação restam 12 algarismos e, na quarta, sobram 6 algarismos.

05. Como a área da folha é 300cm^2 , cada quadrado destacado tem área $\frac{300}{12} = 25\text{cm}^2$ e, portanto, lado medindo 5cm. Logo o volume desse cubo é $5^3 = 125\text{cm}^3$.

06. A soma dos 27 números escritos na tabela é igual a 3 vezes X e a 9 vezes o Y. Como X é a soma dos números de cada coluna, temos $X = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$. Portanto $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 9 \cdot Y \Leftrightarrow 3 \cdot 45 = 9 \cdot Y \Leftrightarrow Y = 15$.

Logo $X + Y = 45 + 15 = 60$. O desenho ao lado mostra uma forma de escrever os números na tabela.

1	5	9	Y
2	6	7	Y
3	4	8	Y
4	9	2	Y
5	7	3	Y
6	8	1	Y
7	2	6	Y
8	3	4	Y
9	1	5	Y
X	X	X	

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

- a) Há $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos, escritos em cartões amarelos, e $9999 - 1000 + 1 = 9000$ números de quatro algarismos, escritos em cartões azuis. Ao todo, foram utilizados $900 + 9000 = 9900$ cartões.
- b) Como existe a possibilidade de serem retirados todos os cartões amarelos antes de aparecer algum azul, para Jade ter certeza de que há dois cartões azuis entre os retirados ela deverá retirar $900 + 2 = 902$ cartões.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Este item vale 6 pontos.

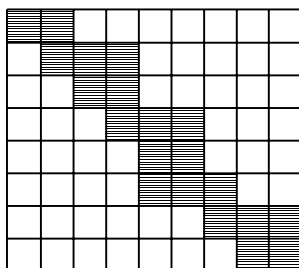
- Acertou apenas a quantidade de cartões amarelos: [3 pontos]
- Acertou apenas a quantidade de cartões azuis: [3 pontos]
- Disse que a quantidade de cartões azuis é 899 ou 901: [1 ponto] (qualquer outra resposta, 0 ponto)
- Disse que a quantidade de cartões azuis é 8999 ou 9001: [1 ponto] (qualquer outra resposta, 0 ponto)
- Desenvolveu um método correto para contar todos os cartões mas errou na conta: [4 pontos]

b) Este item vale 4 pontos.

- Disse que a quantidade de cartões necessária é 900: [1 ponto] (respostas diferentes de 902 e 900 recebem 0 ponto)
- Respostas do tipo “pode ser que os dois primeiros já sejam azuis e aí ela não precisa mais tirar outros cartões e, portanto, não se pode definir quantos cartões ela precisa retirar”: [0 ponto]
- Percebeu que quando tira 1 cartão, ele pode ser azul ou amarelo, quando se tira 2 cartões eles podem ser azul e azul, amarelo e amarelo ou azul e amarelo e assim por diante: [2 pontos]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Como cada quadradinho tem 1 cm^2 de área, o lado de cada um mede 1 cm.



- a) Há 20 quadradinhos pintados de cinza. Logo a área da figura formada é $20 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$ e como há 8 segmentos verticais à esquerda e 8 à direita além de 9 segmentos horizontais pela parte de cima e 9 pela de baixo, o perímetro, que é a soma das medidas de todos os lados, é $2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 16 + 18 = 34 \text{ cm}$.
- b) O quadriculado inteiro é um retângulo de lados 8 cm e 9 cm, e portanto de perímetro $2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 16 + 18 = 34 \text{ cm}$. Deste modo, o valor máximo da área que podemos obter é quando a figura for igual a todo o quadriculado e, assim, a área será $8 \cdot 9 = 72 \text{ cm}^2$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Este item vale 6 pontos.

- Acertou apenas a área: [3 pontos]
- Acertou apenas o perímetro: [3 pontos]
- Desenvolveu um método correto para encontrar a área ou o perímetro, mas errou na conta: [2 pontos para cada].

b) Este item vale 4 pontos.

- Disse que a maior área é 72 cm^2 e não justificou: [2 pontos]
- Observou que agregando um quadradinho que não pertença à figura mas tenha exatamente dois lados em comum com ela o perímetro não muda mas a área aumenta, sem calcular o valor máximo da área: [2 pontos]
- Solução completa: [4 pontos]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) Ela escreveu em cada uma das 9 primeiras linhas, na seguinte ordem, 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223 e 114213. Logo na 10ª linha ela escreveu 31121314.

b) Esmeralda escreveu em cada uma das primeiras linhas, na seguinte ordem, 01, 1011, 1031, 102113, 10311213, 10411223, 1031221314, 1041222314, 1031321324, 1031223314, 1031223314, ..., e percebeu que, a partir da 10ª linha, o número 1031223314 começa a repetir.

Portanto os dois primeiros algarismos da esquerda do número que ela digitou na 2006ª. linha serão 1e 0.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:**a) Este item vale 5 pontos**

As seguintes pontuações não se acumulam:

- Acertou somente os números até a 6ª linha: [0 ponto]
- Acertou somente os números até a 7ª linha: [1 ponto]
- Acertou somente os números até a 8ª linha: [2 pontos]
- Acertou somente os números até a 9ª linha: [3 pontos]

b) Este item vale 5 pontos (não cumulativos).

- Disse 10 e não justificou: [1 ponto]
- Percebeu que o 0 aparece sempre uma vez em cada linha: [2 pontos]
- Percebeu que a partir de alguma linha o número 1031223314 se repete: [5 pontos]