XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	9	36	750	6	339

01. Sejam *a*, *b*, *c* e *d* algarismos tais que o par (*ab*, *cd*) é centenário. Então,

$$(10a+b)+(c+d)=(10c+d)+(a+b)=100$$

como $b+c+d \le 27$, $10a \ge 73$, e assim $a \ge 8$ e, de modo análogo, $c \ge 8$. Ainda mais,

$$(10a+b)+(c+d)=(10c+d)+(a+b) \Leftrightarrow 9a=9c \Leftrightarrow a=c.$$

Temos então 2 casos:

I) $a=c=8 \Rightarrow 80+b+8+d=100 \Leftrightarrow b+d=12$, sendo esta uma condição necessária e suficiente para o par em questão ser centenário. Obtemos assim os 7 seguintes pares:

(83;89), (84;88), (85;87), (86;86), (87;85), (88;84) e (89;83).

II) $a=c=9 \Rightarrow 90+b+9+d=100 \Leftrightarrow b+d=1$, obtendo outros 2 pares centenários:

(90;91) e (91;90).

Há, assim, 9 pares centenários.

02. Seja *J* a interseção dos segmentos *BC* e *FG*. Como *M* é ponto médio do segmento *BC*, oposto ao vértice *E*, conclui-se que *EF* é diâmetro, e $\angle FGE=\angle BMF=90°$. Sendo *ABCDE* um pentágono regular, $\angle ABC=108°$.

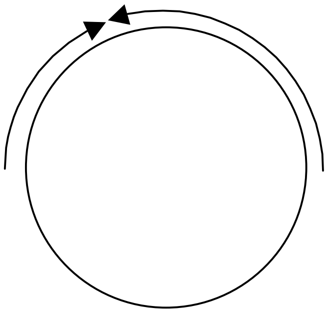
No ΔGHI : $\angle GHI=\alpha \Rightarrow \angle GIH=90°-\alpha$.

No ΔBJH : $\angle BHJ=\alpha \Rightarrow \angle BJH=72°-\alpha$.

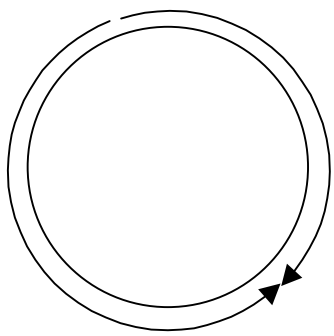
No ΔFJM : $\angle FJM=72°-\alpha \Rightarrow \angle JFM=18°+\alpha$.

Para que os triângulos *EFG* e *HIG* sejam semelhantes, como $\alpha \ne 18°+\alpha$, a única possibilidade é termos $90°-\alpha=18°+\alpha \Leftrightarrow \alpha=36°$.

03. No momento do primeiro cruzamento, Esmeralda e Jade percorreram a distância total igual à metade da extensão da pista. Entre o primeiro e o segundo cruzamento, as moças percorreram uma distância total igual à extensão da pista. Portanto Esmeralda correu o dobro da distância que correu até o primeiro cruzamento, ou seja, $2\cdot 200=400$ metros e, deste modo, a extensão da pista é 400 + 350 = 750 metros.

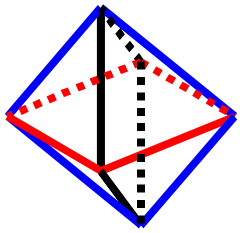


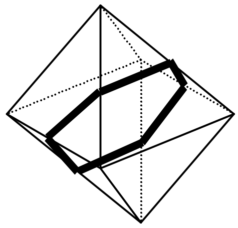
Até o primeiro encontro



Entre o primeiro e o segundo encontro

04. Considere os três planos que passam pelo centro do octaedro e contêm 4 das 12 arestas do octaedro, formando três quadrados. A secção corta no máximo dois lados de cada quadrado. Portanto corta no máximo 6 arestas do octaedro. Assim, a maior quantidade de lados que uma secção pode determinar no octaedro regular é 6. Um exemplo de secção hexagonal é um plano paralelo a duas faces opostas.





05. Seja $n > 1$ a quantidade de dados. Podemos representar um lançamento dos n dados com a n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sendo a_i o resultado do dado i. Como a_i é um inteiro entre 1 e 6, existe uma bijeção entre os pares $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(7 - a_1, 7 - a_2, \ldots, 7 - a_n)$, de modo que a probabilidade de obter soma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é a mesma de obter soma $(7 - a_1) + (7 - a_2) + \ldots + (7 - a_n) = 7n - S$. Além disso, para $n + 1 \le S \le 7n/2$, a probabilidade de obter soma $S - 1$ é menor do que a probabilidade de obter soma S. Portanto as somas distintas S e T têm a mesma probabilidade de ocorrer se, e somente se, $T = 7n - S$. Em particular, a única soma com a mesma probabilidade de ocorrer que a soma 2006 é $7n - 2006$.
Como $2006 = 334 \cdot 6 + 2$, precisamos jogar, no mínimo, 335 dados, ou seja, $n \ge 335$. Pelo fato acima, o valor procurado é $7 \cdot 335 - 2006 = 339$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Uma solução:

Observe que teremos 1 criança com 2 brinquedos, enquanto cada uma das $n - 1$ crianças restantes terá apenas 1 brinquedo. Assim, temos n possibilidades para a escolha da felizarda criança, e $\binom{n+1}{2}$ possibilidades para escolher os 2 brinquedos desta criança. Restando $n - 1$ brinquedos e $n - 1$ crianças, temos $(n - 1)!$ modos de distribuir estes brinquedos entre estas crianças. Assim, temos um total de $n\binom{n+1}{2}(n-1)! = \binom{n+1}{2}n!$ modos de distribuir os $n + 1$ brinquedos entre as n crianças.

Outra solução:

Observe que teremos 1 criança com 2 brinquedos, enquanto cada uma das $n - 1$ crianças restantes terá apenas 1 brinquedo. Temos n escolhas para a criança que terá dois brinquedos. Escolhida tal criança, o número de maneiras de distribuir os $n + 1$ brinquedos é igual ao número de anagramas da palavra $A_1A_1A_2A_3\ldots A_n$, que é $\frac{(n+1)!}{2!} = \frac{(n+1)!}{2}$. Assim, o total de maneiras de distribuir os $n + 1$ brinquedos entre as n crianças é $n \cdot \frac{(n+1)!}{2}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO (VÁLIDO PARA AMBAS AS SOLUÇÕES):

- Observou que uma criança ganha dois brinquedos e as demais, um brinquedo: **[1 ponto]**
- Notou que pode escolher a criança que ganha dois brinquedos de *n* maneiras: **[2 pontos]**
- Obteve que o número de maneiras de distribuir os brinquedos, escolhida a criança que iria ganhar dois brinquedos, é $\binom{n+1}{2}(n-1)! = \frac{(n+1)!}{2}$: **[5 pontos]**
- Concluiu: **[2 pontos]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.

- Obteve a resposta *n* (que seria a resposta correta se todos os brinquedos fossem indistingüíveis): **[0 ponto]**
- Obteve a resposta correta para $n = 1$, 2 ou 3: **[0 ponto]**
- Obteve a resposta correta para algum $n > 3$: **[6 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Uma solução:

$ab+1 \mid (a+1)(b+1) \Rightarrow ab+1 \mid ab+a+b+1 \Rightarrow ab+1 \mid (ab+a+b+1)-(ab+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+1 \mid a+b \Rightarrow ab+1 \le a+b \Rightarrow a(b-1) \le b-1$. Desta última desigualdade, observamos que, se $b>1$, então $a \le 1 \Rightarrow a=1$, ou seja, um dentre os inteiros *a* e *b* vale 1. Suponha, então, sem perda de generalidade, que $a = 1$. Substituindo, obtemos $a=1 \Rightarrow b+1 \mid 2(b+1)$, o que é válido para todo inteiro positivo *b*. As soluções são, então, (1, *b*) e (*a*, 1).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostrou que $a + b$ é múltiplo de $ab + 1$: **[2 pontos]**
- Utilizou o fato de que se *x* é múltiplo de *y*, *x* e *y* positivos, então $x \le y$: **[2 pontos]**
- Mostrou que $a = 1$ ou $b = 1$: **[5 pontos]**
- Verificou que os pares (1, *b*) e (*a*, 1) são soluções: **[1 ponto]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais mas podem se acumular entre si.

- Testou casos particulares: **[0 ponto]**
- Utilizou propriedades de divisibilidade, mas não conseguiu resolver o problema: **[2 pontos]**
- Verificou que os pares (1, *b*) e (*a*, 1) são soluções: **[1 ponto]**

Outra solução:

Como $(a + 1)(b + 1)$ é múltiplo de $ab + 1$, existe um inteiro positivo *k* tal que $(a+1)(b+1) = k(ab+1) \Leftrightarrow a(kb-b-1) = b-k+1$. Se $kb - b - 1 = 0$, então $k = 1 + \frac{1}{b}$, que é inteiro se, e somente se, $b = 1$. Se $kb-b-1 \ne 0$ então $a = \frac{b-k+1}{kb-b-1} \ge 1 \Rightarrow b-k+1 \ge kb-b-1 \Leftrightarrow k \le 2$. Se $k = 1$, obtemos $a = -(b + 1) < 0$. Logo $k = 2$ e $a = 1$. Verifica-se que (1, *b*) e (*a*, 1) são realmente as soluções.

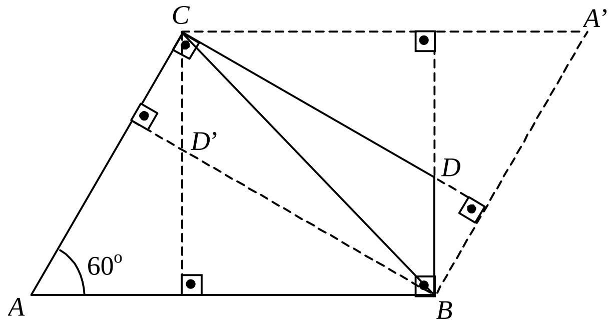
CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Testou casos particulares: **[0 ponto]**
- Obteve a relação $a(kb-b-1) = b-k+1$ ou $b(ka-a-1) = a-k+1$: **[3 pontos]**
- Estudou completamente o caso $kb - b - 1 = 0$: **[2 pontos]**
- Estudou completamente o caso $kb-b-1 \ne 0$: **[4 pontos]**
- Verificou que os pares (1, *b*) e (*a*, 1) são soluções: **[1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Uma solução:

Sejam *A*' o ortocentro do triângulo *BCD* e *D*' o ortocentro do triângulo *ABC*.

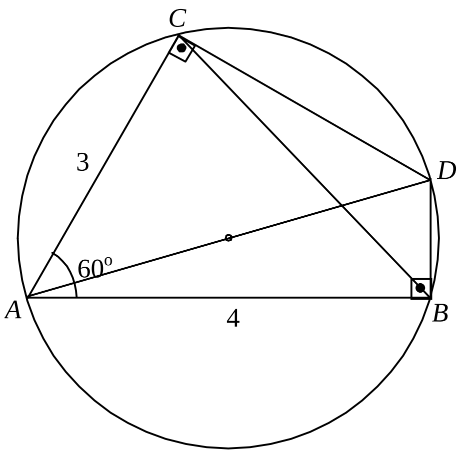


Como as retas *CD*' e *BD* são ambas perpendiculares a *AB*, são paralelas. Analogamente, as retas *BD*' e *CD* são paralelas. Logo o quadrilátero *BDCD*' é um paralelogramo e, portanto, os triângulos *BCD* e *BD*'*C* são congruentes.

Da mesma maneira, as retas *AB* e *CA*' são paralelas, pois são perpendiculares a *BD*. Analogamente, as retas *AC* e *BA*' são paralelas. Logo o quadrilátero *CABA*' é um paralelogramo e, assim, os triângulos *ABC* e *A*'*CB* são congruentes.

Conseqüentemente, os quadriláteros *ABDC* e *A*'*CD*'*B* são congruentes, de modo que a distância entre os ortocentros *A*'*D*' é igual a *AD*.

Devemos, então, calcular *AD*. Como os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são ambos retos, somam 180º e, portanto, o quadrilátero *ABCD* é inscritível, sendo *AD* diâmetro de seu circuncírculo.



Pela lei dos co-senos,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{13}$$

Enfim, pela lei dos senos,

$$AD = 2R = \frac{BC}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

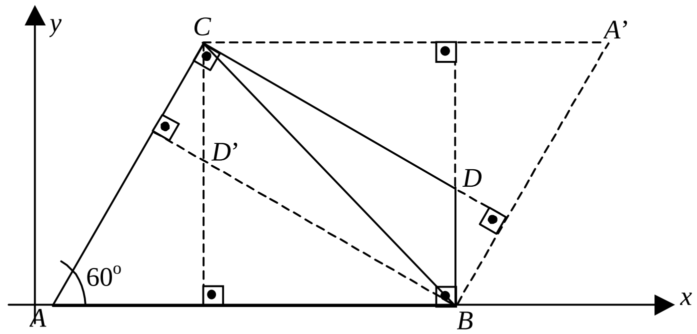
e, portanto, a distância entre os ortocentros é $\frac{2\sqrt{39}}{3}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Provou que *BDCD'* é paralelogramo e que *BCD* e *BD'C* são congruentes: **[2 pontos]**
- Provou que *CABA'* é paralelogramo e que *ABC* e *A'CB* são congruentes: **[2 pontos]**
- Concluiu, a partir dos fatos acima ou fatos equivalentes, que a distância procurada é igual a *AD*: **[2 pontos]**
- Calculou *AD*: **[4 pontos]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais mas podem se acumular entre si.
- Percebeu que *ABCD* é inscritível: **[1 ponto]**

Outra solução:

Sejam *A'* o ortocentro do triângulo *BCD* e *D'* o ortocentro do triângulo *ABC*.



Sejam $A = (0;0)$ e $B = (4;0)$. Sendo $AC = 3$ e $m(B\hat{A}C) = 60^{\circ}$, podemos supor que $C = (3\cos 60^{\circ}; 3\,\text{sen}\, 60^{\circ}) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Como a reta *CD'* é perpendicular ao eixo *x*, admite equação $x = \frac{3}{2}$. Além disso, sendo a reta *BD'* perpendicular à reta *AC*, de coeficiente angular $\text{tg}\, 60^{\circ} = \sqrt{3}$, seu coeficiente angular é $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Logo, sendo $D' = \left(\frac{3}{2}; a\right)$, $\frac{a-0}{\frac{3}{2}-4} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Calculemos agora *A'*. Como *A'* pertence à perpendicular a *BD* por *C*, então $A' = \left(b; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. A reta *CD* é perpendicular a *AC* e, portanto, tem coeficiente angular $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Enfim, sendo *A'B* perpendicular a *CD*, tem coeficiente angular $\frac{-1}{\frac{-1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$. Deste modo, $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-0}{b-4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \frac{11}{2}$.

Logo a distância entre os ortocentros *A'* e *D'* é $\sqrt{\left(\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Obteve uma equação ou sistema que permite calcular as coordenadas de *D'*: **[2 pontos]**
- Encontrou as coordenadas de *D'*: **[2 pontos]**
- Obteve uma equação ou sistema que permite calcular as coordenadas de *A'*: **[2 pontos]**
- Encontrou as coordenadas de *A'*: **[2 pontos]**
- Calculou *A'D'*: **[2 pontos]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais mas podem se acumular entre si.
- Percebeu que *ABCD* é inscritível: **[1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Os primeiros valores da seqüência são:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$$

Nota-se que, para $n > 7$, $F_n > 2n$. De fato, indutivamente, se $F_n > 2n$ e $F_{n+1} > 2(n + 1)$ então $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > 2(n + 1) + 2n > 2(n + 2)$.

Portanto $F_n > 2n > \frac{3n}{2} > \frac{4n}{3} > n$ para $n > 7$, de modo que para resolver as equações $F_n = n$, $F_n = \frac{3n}{2}$, $F_n = \frac{4n}{3}$, basta testar os valores de n menores ou iguais a 7.

Se $n > 5$, de $F_m \cdot F_n = mn$ devemos ter $F_m < m$, donde $m < 5$. Logo pelo menos um dos números m e n deve ser no máximo 5. Suponha, sem perda de generalidade, $n \leq 5$. Observando os possíveis valores de n:

- $n = 1 \Rightarrow F_m = m$, cujas soluções são $m = 1$ e $m = 5$.
- $n = 2 \Rightarrow F_m = 2m$, que não possui solução.
- $n = 3 \Rightarrow 2F_m = 3m$, que não possui solução.
- $n = 4 \Rightarrow 3F_m = 4m$, que possui a única solução $m = 6$.
- $n = 5 \Rightarrow F_m = m$, cujas soluções são $m = 1$ e $m = 5$.

Os pares (m, n) que satisfazem a relação pedida são:

$$(1, 1), (1, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 5) \text{ e } (6, 4).$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Notou que $F_n > an$ para algum $a \geq 1$ e todo n suficientemente grande: **[2 pontos]**
- Provou o fato acima: **[4 pontos]**
- Limitou o problema a verificar uma quantidade finita de valores de m (ou n): **[2 pontos]**
- Determinou todos os pares: **[2 pontos]**

Observação: o aluno não perde ponto se colocar um par (a, b) e esquecer o par (b, a).